मराठी

माध्यमिक याम-रैखिकी

(Intermediate Coordinate Geometry)

मध्यप्रदेश-शासनाच्या आदेशानुसार विरचित

प्रकाशक

नागपूर विश्वविद्यालय

नागपूर

भारतीय विद्या भवन
दिल्ली केन्द्र
1560

1560

~~510~~
KSH

~~757~~

हिन्दी मराठी वैज्ञानिक पाठ्यपुस्तकमाला

संपादक

डॉ. रघुवीर, एम्. ए., पीएच्. डी. (लंदन), डी. लिट्. एट् फिल्. (हॉलेंड)

मराठी

माध्यमिक याम-रैखिकी

(Intermediate Coordinate Geometry)

मध्यप्रदेश- शासनाच्या आदेशानुसार विरचित

Bharatiya Vidya Sri Sankaracharya Sanskrit Mahavidyalaya

903

प्रकाशक

नागपूर विश्वविद्यालय

नागपूर.

नागपूर विश्वविद्यालय द्वारा सर्वाधिकार सुरक्षित

१९५१

मुद्रक

जयहिन्द प्रिंटिंग प्रेस, गोपालबाग, जबलपुर

Bhawan's Sri Sank... Vidya... Mala
203

मूल्य ५)

मराठी

माध्यमिक याम-रैखिकी

(Intermediate Coordinate Geometry)

लेखक

श्री. एन्. एस्. क्षीरसागर, बी. एस्सी. (ऑनर्स)

अनुवादक

श्री. यशवंत विनायक ठोसर एम्. एस्सी.

प्राध्यापक, विज्ञान महाविद्यालय, नागपुर.

गणित सम्पादक

श्री. नीलकण्ठ आबाजी शास्त्री एम्. एस्सी. (लन्दन)

FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University: for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B.A. and B.Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the immediate practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude.

2. These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text-books and Teachers.

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr. Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media. Dr. Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots. He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful.

3. These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text-books of science under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira.

They have so far prepared fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co-ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical).

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University.

4. Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text-books prepared for its courses in Science. Their printing is now in progress and seven of these —both Hindi and Marathi versions—which

are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published to-day.

5. In the special position occupied by the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi. This has added to the labour and the cost involved. At the same time it has given us a unique advantage: we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union. The inter-action of the two parallel series of lectures and text-books in the same University —and in many cases, in the same college— will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present.

6. As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50. The proposal for preparation and publication of text-books specially designed for the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was,

however, though desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Board of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage, however, this creates an immediate difficulty in re-organizing the teaching

arrangements on the new basis. The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective.

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University.

8. The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education. The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves. The text-books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equivalents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to

their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that

operate in Universities. Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations.

10. Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems. Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach. One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another—a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future. The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text-books for use of students; (ii) students and teachers will, for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents; and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science.

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11. I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good book in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have some writteen material to stimulate and sustain our thinking in these languages. It is a vicious circle that has to be

broken and the present series of books is an organised attempt to break it. Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of which is written in these text-books. If, however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded.

The J. N. Tata University, Convocation Hall, Nagpur.
15th August, 1950.

K. L. Dubey,
Vice-Chancellor,
Nagpur University.

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक प्रथम मी इंग्रजींत लिहिलें त्यानंतर माझी अमरावतीला प्राध्यापक म्हणून नेमणूक झाल्यामुळे मला हें काम सोडून जावे लागले. या पुस्तकाचा मराठी अनुवाद श्री. य. वि. ठोसर, एम्. एस्सी. यांनी व हिंदी अनुवाद श्री. सत्येन्द्रनाथ भादुरी, एम्. एस्सी. यांनी केला आहे. नागपूर विश्वविद्यालयाच्या इंटरमिजिएटच्या विद्यार्थ्यांना उपयोगी पडेल या दृष्टीने हें पुस्तक लिहिलें आहे. ठिकठिकाणीं नमुन्यादाखल उदाहरणें सोडविलीं आहेत व शक्य असेल तेथे निरनिराळ्या रीति दिल्या आहेत. म्हणून हें पुस्तक विद्यार्थ्यांना विशेष उपयुक्त वाटेल असा विश्वास वाटतो.

हे पुस्तक लिहितांना महाकोशल महाविद्यालयाचे प्रा. नी. आ. शास्त्री यांनी अनेक अमूल्य सूचना केल्या याबद्दल त्यांचा मी आभारी आहे. तसेंच भाषेच्या दृष्टीने हें पुस्तक तपासून पाहिल्याबद्दल प्रा. वि. भि. कोलते (नागपूर महाविद्यालय) यांचे मी आभार मानतो.

या पुस्तकांत वापरलेले पारिभाषिक शब्द डॉ. रघुवीर यांनी दिले आहेत.

एन्. एस्. क्षीरसागर

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

अनुक्रमणिका

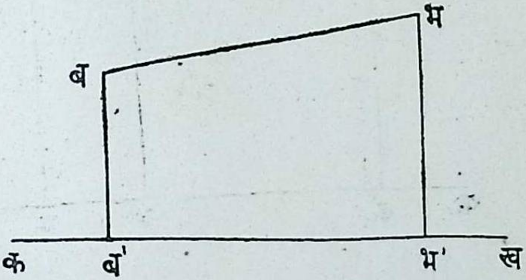
प्रकरण		पृष्ठ
१ लें	बीजगणित व रेखिकी यांमधील कांही ठळक फलें	१
२ रें	याम	८
३ रें	पथ व त्यांचे समीकार, यामांचें रूपांतर	२४
४ थें	सरळ रेषा	३८
५ वें	वृत्त	११६
६ वें	शंकुच्छेद आणि एकेंद्र	१७०
७ वें	ऊनेंद्र	२२९
८ वें	अधींद्र	२९४
	उत्तरें	३४१
	पारिभाषिक शब्दावली :	
	भारतीय–आंग्ल	१०
	आंग्ल–भारतीय	५०

प्रकरण १ लें

बीजगणित व रैखिकी यांमधील कांही ठळक फलें.

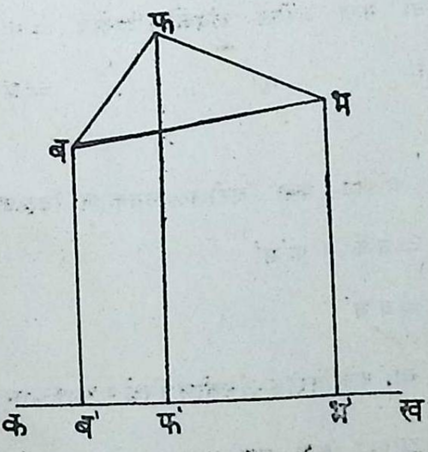
१ **विक्षेप**

बभ ह्या सरळ रेषेच्या ब आणि भ टोकांपासून दुसऱ्या कोणत्याहि कख ह्या सरळ रेषेला ब' आणि भ' ह्या बिंदूंत मिळणाऱ्या बब' व भभ'



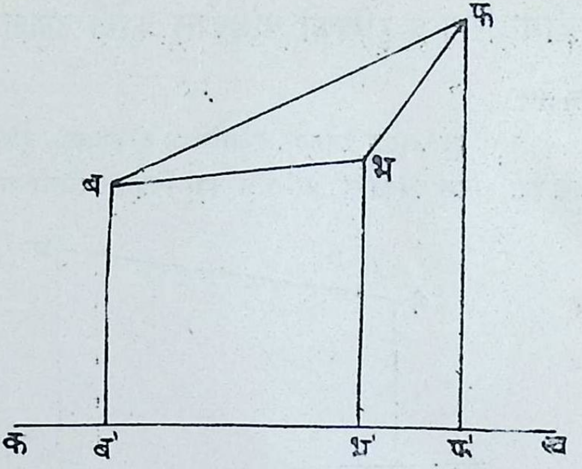
आ. १

अशा दोन लंब रेषा काढल्यास ब'भ' रेषेला, बभ रेषेचा कख रेषेवरील लंबकोण विक्षेप(orthogonal projection) म्हणतात. ब' हा बिंदु ब चा व भ' हा बिंदु भ चा कख रेषेवरील विक्षेप (projeotion) आहे.



आ. २.१

समजा, फ हा बभ रेषेंतून जाणाऱ्या कोणत्याहि समतलावरील एक बिंदु असून फ' हा त्याचा कख रेषेवरील विक्षेप आहे.



आ. २.२

तेव्हा आकृतीवरून

(१) बफ चा कख वरील लंबकोण विक्षेप = ब'फ'

आणि (२) फभ चा ,, ,, ,, ,, = फ'भ'

∴ योग करून

बफ व फभ यांच्या कख वरील लंबकोण विक्षेपांचा योग

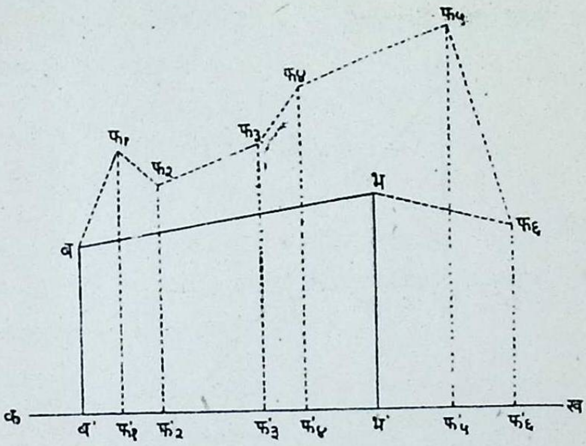
= ब'फ' + फ'भ'

= ब'भ'

परंतु, ब'भ' हा बभ चा, कख वरील लंबकोण विक्षेप असल्यामुळे,

बफ व फभ ह्यांच्या कख ह्या दुसऱ्या कोणत्याहि रेषेवरील लंबकोण विक्षेपांचा योग = बभ चा त्याच रेषेवरील लंबकोण विक्षेप.

१.१ वरील फल प्रमेय-स्वरूपांत विस्तृतपणें मांडतां येतें तें असें :—



आ. ३

ब आणि भ हे दोन बिंदू जोडणाऱ्या तुटक रेषांच्या कख ह्या एखाद्या दुसऱ्या रेषेवरील लंबकोण विक्षेपांचा बीजीय योग हा बभ ह्या रेषेच्या कख रेषेवरील लंबकोण विक्षेपासमान असतो.

आकृतीवरून

$$ब'फ'_१ + फ'_१फ'_२ + फ'_२फ'_३ + फ'_३फ'_४ + फ'_४फ'_५ + फ'_५फ'_६ + फ'_६भ' = ब'भ' \quad \ldots\ldots (१)$$

परंतु, ब'भ' हा बभ ह्या सरळ रेषेचा कख वरील लंबकोण विक्षेप आहे.

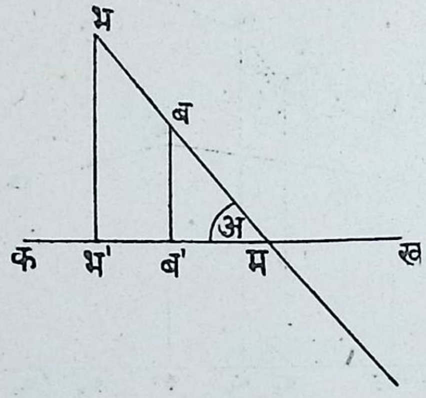
तसेंच $ब'फ'_१$, $फ'_१फ'_२$, ... इत्यादि ब आणि भ बिंदू जोडणाऱ्या अनुक्रमें $बफ_१$, $फ_१फ_२$ .... $फ_६भ$ ह्या तुटक रेषांचे कख वरील लंबकोण विक्षेप आहेत.

म्हणून समीकार (१) वरून इष्ट प्रमेय सिध्द होतें.

२ लंबकोण-विक्षेपाची लांबी

समजा, कख या दिलेल्या सरळ रेषेवर बभ या सरळरेषेचा लंबकोण

विक्षेप काढावयाचा आहे. कख आणि बभ ह्या परस्परांस म मध्ये अ कोण करून मिळतात.



आ. ४.१

आ. ४.२

आकृतींत दाखविल्याप्रमाणे म बिंदु बभ वर किंवा बभ वाढवून तिच्यावर येईल.

∴ दोन्ही आकृतींवरून

मब' = मब . कोज्या अ

आणि

$$मभ' = मभ \text{ कोज्या } अ$$

$$\therefore \; मभ' - मब' = ब'भ'$$
$$= \text{कोज्या } अ . (मभ - मब)$$
$$= \text{कोज्या } अ . (बभ)$$

$$\therefore \quad ब'भ' = बभ . \text{ कोज्या } अ$$

म्हणून कोणत्याहि रेषेच्या दुसऱ्या एखाद्या रेषवरील लंबकोण-विक्षेपाची लांबी, ही पहिल्या रेषेची लांबी व त्या दोन रेषांमधील कोणाची कोटिज्या, ह्यांच्या गुणाकारासमान असते.

३. निरसन (elimination)

$$क_1 य + ख_1 र = ० \qquad (१)$$

$$क_2 य + ख_2 र = ० \qquad (२)$$

ह्या समीकारांतून य आणि र चें निरसन करणें :–

समीकार (१) आणि (२) वरून,

$$\frac{य}{र} = -\frac{ख_1}{क_1}$$

$$\frac{य}{र} = -\frac{ख_2}{क_2}$$

हीं फलें (results) मिळतात. ह्या फलांतील $\frac{'य'}{र}$ च्या अर्हांचा समीकार मांडून

$$\frac{ख_1}{क_1} = \frac{ख_2}{क_2}$$

म्हणजेच, $क_1 ख_2 - क_2 ख_1 = ०$ (३)

य आणि र च्या त्याच अर्हांनी समीकार (१) आणि (२) चें समाधान होण्याकरिता $क_1 ख_2 - क_2 ख_1 = ०$ हा प्रतिबंध आहे.

प्रतिबंध काढण्याच्या ह्या विधीला 'निरसन' आणि ह्या प्रतिबंधाला समीकार (१) आणि (२) चें 'निरास फल' (eliminant) असं म्हणतात.

हा प्रतिबंध खालीलप्रमाणे निश्चायक (determinant) स्वरूपांत देखील लिहितां येतो :—

$$\begin{vmatrix} क_1 ख_1 \\ क_2 ख_2 \end{vmatrix} = 0$$

३ · १ समजा,

$$क_1 य + ख_1 र + ग_1 ल = 0$$

$$क_2 य + ख_2 र + ग_2 ल = 0$$

$$क_3 य + ख_3 र + ग_3 ल = 0$$

ह्या तीन समीकारांतून य, र आणि ल चें निरसन करावयाचें आहे.

तेव्हां समीकार (१) आणि (२) यांचा वज्राभ्यास (cross multiplication) करून

$$\frac{य}{ख_1 ग_2 - ख_2 ग_1} = \frac{र}{ग_1 क_2 - ग_2 क_1} = \frac{ल}{क_1 ख_2 - क_2 ख_1}$$

$$= म \text{ (समजा)}.$$

य, र आणि ल यांच्या अर्हांचे समीकार (३) मध्ये, आदेश (substitution) केल्यास

$$क_3 (ख_1 ग_2 - ख_2 ग_1) + ख_3 (ग_1 क_2 - ग_2 क_1)$$

$$+ ग_3 (क_1 ख_2 - ख_1 क_2) = 0$$

हें इष्ट 'निरासफल' मिळतें.

हें निरासफल सुद्धा निश्चायक स्वरूपांत खालीलप्रमाणे लिहितां येतें :—

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} = 0$$

४ निम्न समीकारांतून 'इ' चें निरसन :-

$$क \text{ कोज्या } इ + ख \text{ ज्या } इ + ग = 0 \qquad (१)$$

$$क' \text{ कोज्या } इ + ख' \text{ ज्या } इ + ग' = 0 \qquad (२)$$

समीकार (१) आणि (२) यांच्या वज्राभ्यासानें

$$\frac{\text{कोज्या } इ}{ख.ग' - ख'.ग} = \frac{\text{ज्या } इ}{ग.क' - ग'.क} = \frac{१}{क.ख' - क'.ख}$$

ह्या फलावरून

$$\text{कोज्या } इ = \frac{ख.ग' - ख'.ग}{क.ख' - क'.ख}$$

$$\text{व ज्या } इ = \frac{ग.क' - ग'.क}{क.ख' - क'.ख}$$

अशा अर्हा मिळतात.

ह्या अर्हांचा वर्गयोग केल्यास

$$(\text{कोज्या } इ)^2 + (\text{ज्या } इ)^2 = \left(\frac{ख.ग' - ख'.ग}{क.ख' - क'.ख}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{ग.क' - ग'.क}{क.ख' - क'.ख}\right)^2$$

$$= १$$

अर्थात् $(खग' - ख'ग)^2 + (गक' - ग'क)^2 = (कख' - क'ख)^2$

हें निरासफल मिळतें.

५ निरसन व विक्षेपण या संबंधीच्या कांही ठळक ठळक फलांचे वरील प्रमाणे ज्ञान झाल्यावर आपण आता यामरैखिकी (coordinate geometry) ह्या विषयांतील मूलतत्त्वांच्या अध्ययनाकडे वळूं.

प्रकरण २ रें

याम

६ **कल्पना (concept)**

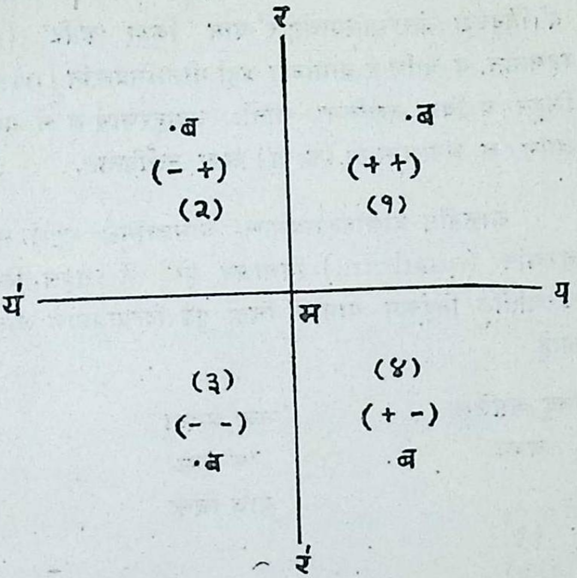
बीजीय (algebraic) क्रियांच्या साह्याने अभ्यासिलेल्या रैखिकीला (geometry) 'यामरैखिकी' (coordinate geometry) म्हणतात. याम (coordinate) पद्धतीचा (system) उपयोग केल्यामुळे बैजिकी व रैखिकी यांचा संबंध जोडणें शक्य झालें आहे. याम पद्धतींत, समतलांतील कोणताहि बिंदु दोन वास्तविक (real) संख्यांच्या द्वारा निरूपिला (represent) जातो. नंतर बीजीय क्रियांचा उपयोग करून कांही रैखिकीय व्यंजकांचीं (expressions) सूत्रें (formula) सिद्ध करितां येतात आणि रैखिकीय पथ (loci) समीकारांनी दर्शवितां येतात.

७ **आयत याम**

कोणत्याहि समतलांत असंख्य बिंदू असतात. एखाद्या समतलांत परस्परांना छेदणाऱ्या कोणत्याहि दोन सरळ रेषा काढून त्यांना अनुलक्षून त्या समतलांतील एखाद्या विवक्षित बिंदूचें स्थान पूर्णपणे व अचूकपणे निश्चित करतां येतें. या दोन रेषांना यामाक्ष (axes of coordinates) आणि त्यांच्या छेदनबिंदूला मूलबिंदु (origin) म्हणतात.

पुढील आकृतींत काढलेल्या य'मय व र'मर या रेषा यामाक्ष असून त्यांना अनुक्रमें य-अक्ष अणि र-अक्ष म्हणतात. त्यांचा छेदनबिंदु 'म' हा मूलबिंदु आहे.

आता आपण या अक्षांना अनुलक्षून त्यांच्या समतलांतील 'ब' या कोणत्याहि बिंदूचें स्थान निश्चित करूं.



आ. ५

य मय ही रेषा समतलाचे दोन भाग करते. या रेषेपासून पण वरच्या दिशेने उदाहरणार्थ, मर समांतर मोजलेलीं सर्व अंतरें धन (positive) आणि खालच्या दिशेने उदाहरणार्थ मर′ समांतर मोजलेलीं अंतरें ऋण (negative) समजलीं जातात. तसेंच र′मर या रेषेच्या उजवीकडे मोजलेलीं सर्व अंतरें धन आणि तिच्या डावीकडे मोजलेलीं सर्व अंतरें ऋण मानलीं जातात.

'ब' बिंदूची प्रत्येक अक्षापासून दुसऱ्या अक्षास समांतर (parallel) मोजलेलीं अंतरें माहीत झाल्यास ब चें समतलांतील स्थान पूर्णपणें निश्चित होतें. या अंतरांच्या बीजीय अर्हांना (values) त्या बिंदूचें याम म्हणतात. र′मर अक्षापासून य′मय अक्षाला समांतर मोजलेल्या 'ब' बिंदूच्या अंतरास त्याचा 'य'–याम किंवा 'भुज'

(abscissa) म्हणतात. य′मय पासून र′मर ला समांतर मोजलेल्या 'ब' बिंदूच्या अंतरास त्याचा 'र'-याम किंवा 'कोटि' (ordinate) म्हणतात. य आणि र यामांच्या अर्हा गोलाभिवारांत (paranthesis) लिहून ब बिंदु दर्शविला जातो. उदाहरणार्थ ब चे याम अनुक्रमें क आणि ख असल्यास तो (क, ख) असा दर्शवितात.

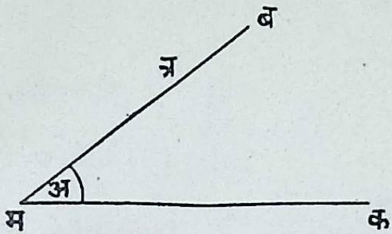
आकृतींत दाखविल्याप्रमाणे, यामाक्षांमुळे संपूर्ण समतलाचें चार चरणांत (quadrant) विभाजन होतें हें सहज दिसून येईल. या चरणांतील बिंदूंच्या यामांचीं चिन्हें पुढे दिल्याप्रमाणे असतात हें उघड आहे.

बिंदु असलेला चरण	भुज अथवा 'य'-याम याचें चिन्ह	कोटि अथवा 'र'-याम याचें चिन्ह
(१)	+	+
(२)	−	+
(३)	−	−
(४)	+	−

जेव्हा यामाक्षांमधील कोण ९०° असतो तेव्हा या पद्धतीस आयत-(rectangular)-याम पद्धति म्हणतात. इतर वेळीं हिला तिर्यक् (oblique)-याम पद्धति म्हणतात.

८ ध्रुवीय याम

या पुस्तकांत आपण मुख्यत: आयत यामांचा उपयोग करूं. ध्रुवीय (polar)-याम नांवाची दुसरी एक पद्धति आहे. तिचा विस्तृत विचार या पुस्तकांत करणें शक्य नाही. तरी पण तिची अल्पशी माहिती व तिचे आयत-याम पद्धतीशीं असलेले संबंध या आणि पुढील अनुच्छेदांत दिले आहेत.



आ. ६

ह्या पद्धतींत, एक स्थिर (fixed) बिंदु असून त्यास 'ध्रुव' (pole) म्हणतात; व त्यांतून जाणाऱ्या एका स्थिर रेषेला आदिरेषा (initial line) म्हणतात. (ध्रुवाला मूल बिंदुहि म्हणतां येईल.)

आता समतलांतील कोणत्याहि बिंदूचें स्थान पुढील दोन राशींनी निश्चित केलें जातें.

(१) बिंदूचें ध्रुवापासूनचें अंतर—ह्याला सदिश त्रिज्या (radius vector) म्हणतात.

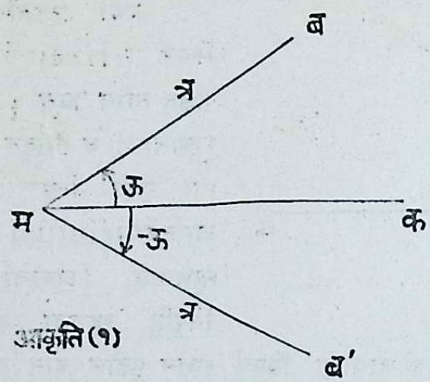
(२) सदिश त्रिज्या आणि आदिरेषा यांमधील कोण—ह्याला सदिश कोण (vectorial angel) म्हणतात.

वर दिलेल्या आकृतींत, 'म' हा ध्रुव व 'मक' ही आदिरेषा असून मब आणि ∠ कमब हे 'ब' बिंदूचे ध्रुवीय याम आहेत. 'त्र' आणि 'ऊ' हीं अक्षरें अनुक्रमें सदिश त्रिज्या आणि सदिश कोण दर्शविण्यासाठी वापरतात. म्हणून सामान्यतः 'ब' या कोणत्याहि बिंदूचे ध्रुवीय याम (त्र, ऊ) असें लिहितात.

रूढि:–

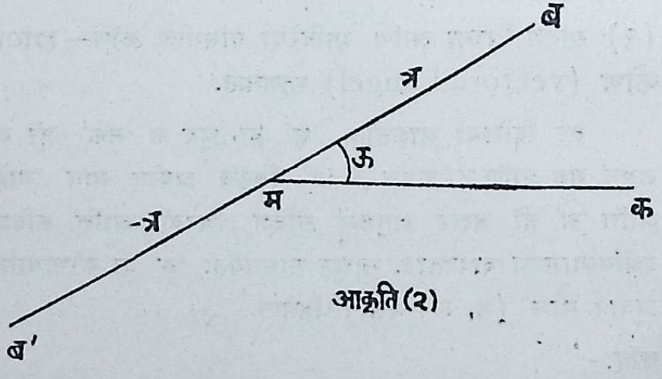
सदिश कोण 'ऊ' नेहमी आदिरेषेपासून मोजतात. त्याची मापन-दिशा प्रतिघटीवत् (anticlockwise) असल्यास तो धन आणि घटीवत् (clockwise) असल्यास तो ऋण समजला जातो.

सदिश त्रिज्या 'त्र' ही, सदिश कोणाच्या मर्यादारेषेच्याच दिशेने मोजलेली असल्यास धन आणि तिच्या विरुद्ध दिशेने मोजलेली असल्यास ऋण समजली जाते.



उदाहरणार्थ, आकृति (१) मध्ये ब व ब' या बिंदूंचे सदिश कोण अनुक्रमें ऊ व –ऊ आहेत

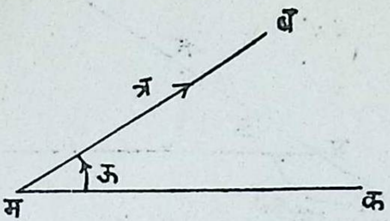
आ. ७. १



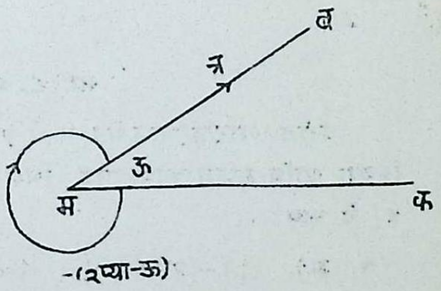
आ. ७. २

आकृति (२) मध्ये ब बिंदूची सदिश त्रिज्या त्र असून मब=मब' असल्यास, 'ब'' बिंदूची सदिश त्रिज्या – त्र होईल. म्हणून मब=मब' असल्यास दोन्ही आकृत्यांत ब' चे ध्रुवीय याम अनुक्रमें (त्र, – ऊ) आणि (– त्र, ऊ) होतील.

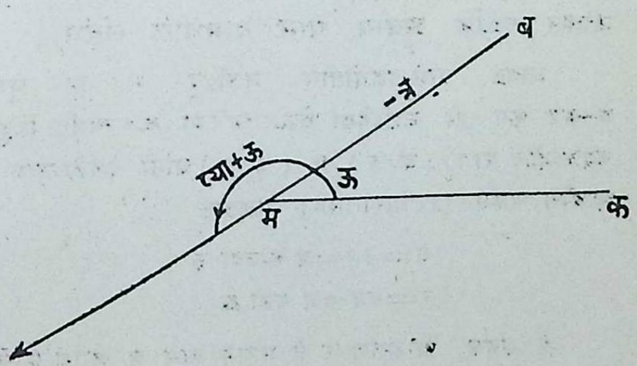
८.१ एकाच बिंदूचे ध्रुवीय याम पुढील चार प्रकारांनी व्यक्त करता येतात.



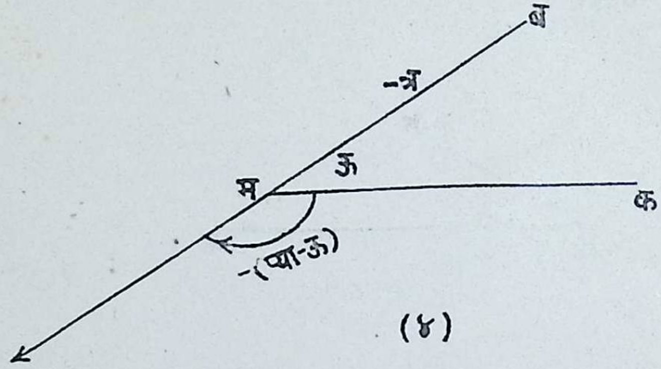
आ. ८.१



आ. ८.२



आ ८.३



(४)

आ. ८.४

वरील चारहि आकृतींत ब चें स्थान तेंच असून त्याची सदिश त्रिज्या आणि सदिश कोण मात्र भिन्न आहेत. वरील आकृत्यांवरून ब चे याम

(त्र, ऊ), {त्र,–(२प्या–ऊ)}, {–त्र, (प्या+ऊ)}, किंवा {–त्र, –(प्या–ऊ)} यापैकी कोणत्याहि एका युग्माने दर्शविता येतात.

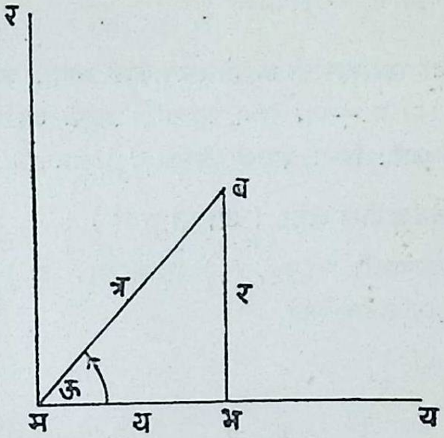
९ आयत आणि ध्रुवीय याम यांमधील संबंध

आयत याम-पद्धतींतील मूलबिंदु म हा ध्रुव आणि य–अक्ष मय ही आदिरेषा घेऊन 'ब' या कोणत्याहि बिंदूचे दोन्ही पद्धतींतील याम (य, र) व (त्र, ऊ) यांनी दर्शविल्यास आपणांस खालील संबंध (relations) मिळतात.

य=नभ=त्र कोज्या ऊ

र=भब=त्र ज्या ऊ

हे संबंध, य आणि र हे आयत याम त्र आणि ऊ या ध्रुवीय यामांत व्यक्त करतात.



आ. ९

व्यत्यासतः (conversely)

$$त्र^2 = य^2 + र^2$$

आणि स्प ऊ= $\frac{र}{य}$

किंवा त्र= $\pm\sqrt{य^2+र^2}$

आणि ऊ= $स्प^{-1}\frac{र}{य}$

या दोन्ही समीकारांवरून काढलेल्या त्र आणि ऊ यांच्या अर्हा अनियत (indefinite) असल्यामुळे हें संबंध (त्र, ऊ) चें अनन्य मान देत नाहीत. आतां

$$त्र=+\sqrt{य^2+र^2}$$

असें निश्चित केल्यास

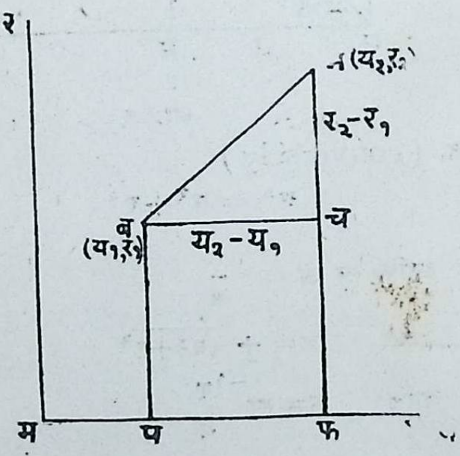
$$कोज्या\ ऊ = \frac{य}{त्र}$$

आणि ज्या ऊ $= \frac{र}{त्र}$

या समीकारांनी ऊ निश्चित केला जातो. ऊ च्या अनेक अर्हांपैकी − प्या व + प्या मध्यं असणारी त्याची अर्हाच केवळ विचारांत घेतली जाते. तिला त्याची प्रमुख (principal) अर्हा म्हणतात.

१० दोन बिंदूंमधील अंतर (आयत याम)

आपणांस ब($य_१$, $र_१$) व भ($य_२$, $र_२$) या दोन बिंदूंमधील अंतर काढावयाचें आहे.



आ. १०

बप व भफ या कोटि काढून बच मय ला समांतर काढा. व तिला भफ रेषेस च बिंदूंत मिळूं द्या.

आता $बच = पफ = मफ - मप = य_२ - य_१$

आणि $चभ = फभ - फच = फभ - पब = र_२ - र_१$

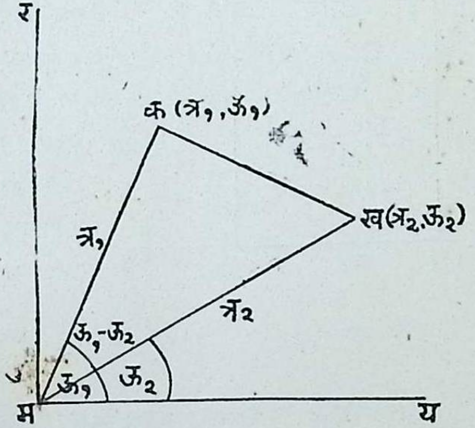
पुन्हा बचभ लंबकोण त्रिकोण असल्यामुळे

$$बभ^2 = बच^2 + चभ^2$$
$$= (य_2 - य_1)^2 + (र_2 - र_1)^2$$

उपसाध्य :-- मूलबिंदूपासून ($य_1$, $र_1$) या बिंदूचें अंतर $\sqrt{य_1^2 + र_1^2}$ आहे.

वरील सूत्रांत $य_2$ व $र_2$ दोन्ही शून्य केल्यास हें तावडतोब सिद्ध होतें.

१०.१ दोन बिंदूंमधील अंतर (ध्रुवीय याम)



आ. १

क, ख या दोन बिंदूंचे ध्रुवीय याम ($त्र_1$, $ऊ_1$) आणि ($त्र_2$, $ऊ_2$) आहेत असें समजा.

कम आणि खम जोडा.

आता कमख त्रिकोणांत,

$$कख^2 = मक^2 + मख^2 - 2मक . मख . कोज्या\ खमक$$

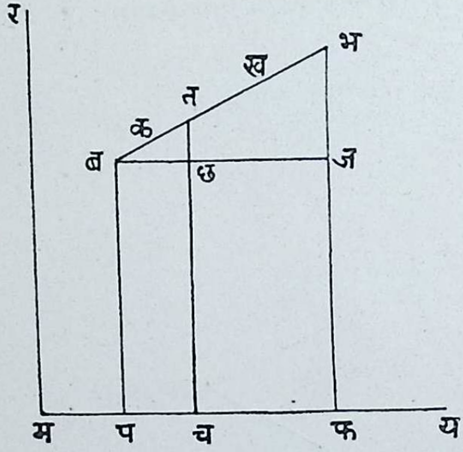
पण $मक = त्र_1$, $मख = त्र_2$, आणि

$$\angle खमक = \angle यमक - \angle यमख = ऊ_1 - ऊ_2$$

$\therefore$ $कख^2 = त्र_1^2 + त्र_2^2 - 2त्र_1त्र_2$ कोज्या $(ऊ_1 - ऊ_2)$

किंवा $कख = \sqrt{त्र_1^2 + त्र_2^2 - 2त्र_1त्र_2 \text{ कोज्या } (ऊ_1 - ऊ_2)}$

११ दिलेल्या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचें दिलेल्या निष्पत्तींत (ratio) भाजन करणाऱ्या बिंदूचे याम काढणें.



आ. १२

ब $(य_1, र_1)$ आणि भ $(य_2, र_2)$ हे दिलेले दोन बिंदू असून त (य, र) हा बभ चें क : ख या निष्पत्तींत भाग करतो. म्हणून

बत : तभ = क : ख

बप, भफ, तच या कोटि काढा व बछज य-अक्षास समांतर काढा.

आता $मप = य_1$; $मच = य$; $मफ = य_2$

$पब = र_1$; $चत = र$; $फभ = र_2$

म्हणून रैखिकीने पच : चफ = बत : तभ

= क : ख

आता $पच = मच - मप = य - य_1$,

आणि $चफ = मफ - मच = य_2 - य$

$$\therefore \quad \frac{य - य_1}{य_2 - य} = \frac{क}{ख}$$

यावरून $$य = \frac{कय_2 + खय_1}{क + ख}$$

तसेंच, $र = \frac{कर_2 + खर_1}{क + ख}$

त बिंदु वभ चें जर बाह्यतः भाजन करीत असेल तर

$$बत : तभ = क : - ख$$

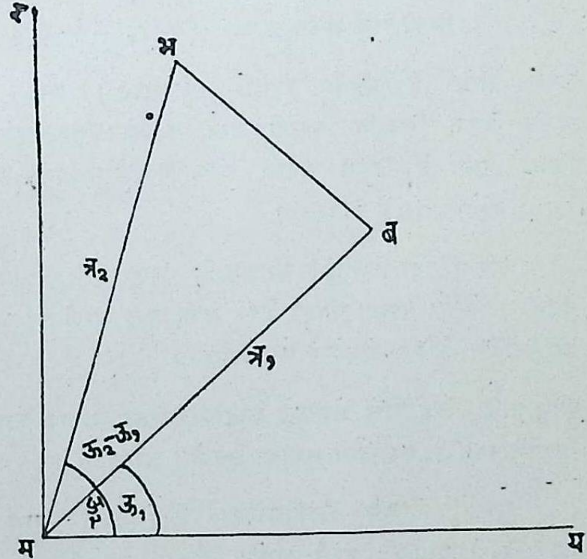
म्हणून अशा वेळी त चे याम

$$य = \frac{कय_2 - खय_1}{क - ख}$$

आणि $र = \frac{कर_2 - खर_1}{क - ख}$ होतील.

वभ रेषेच्या मध्यबिंदूचे याम $\frac{1}{2}(य_1 + य_2)$ आणि $\frac{1}{2}(र_1 + र_2)$ आहेत हें क = ख घेतल्यास सहज दिसून येईल.

१२ त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ



आ. १३

समजा मबभ त्रिकोणाचा एक शिरोबिंदु (vertex) मूलबिंदु (ध्रुव) म हा असून, ब, भ या दुसऱ्या दोन शिरोबिंदूंचे याम अनुक्रमें ($त्र_1$, $ऊ_1$) व ($त्र_2$, $ऊ_2$) आहेत.

आता बभम त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ

$$= \frac{1}{2} मब \,.\, मभ \,.\, ज्या\ बमभ$$

$$= \frac{1}{2} त्र_1 त्र_2 \ ज्या\ (ऊ_2 - ऊ_1)$$

$$= \frac{1}{2} त्र_1 त्र_2 (ज्या\ ऊ_2 \,.\, कोज्या\ ऊ_1 - कोज्या\ ऊ_2 ज्या\ ऊ_1)$$

या फलाचें आयत यामांमध्ये रूपांतर करून,

$$बभम\ त्रिकोणाचें\ क्षेत्रफळ = \frac{1}{2}(य_1 र_2 - य_2 र_1)$$

ब व भ बिंदूंची अदलाबदल केल्यास

$$त्रिकोणाचें\ क्षेत्रफळ - \frac{1}{2}(य_1 र_2 - य_2 र_1)$$

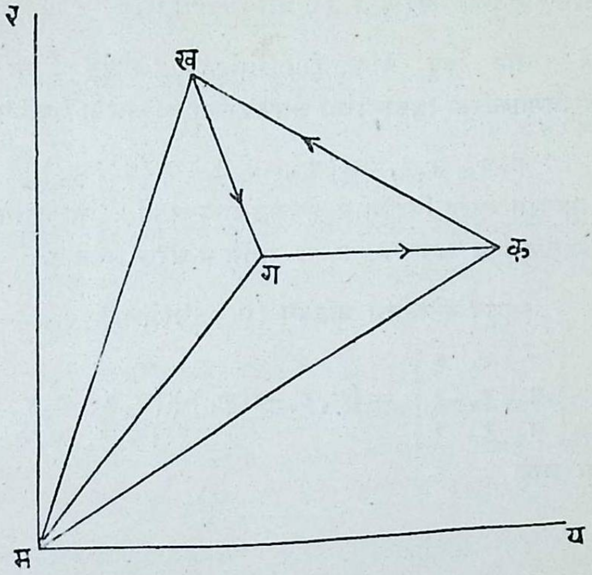
इतकें होतें. हें महतेंत (magnitude) वरील फलाइतकेंच असून केवळ चिन्हांत निराळें आहे. यावरून त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळास चिन्ह असतें हें दिसून येईल. याकरिता सामान्यतः खालील संकेत (convention) वापरतात.

जर एखादा निरीक्षक कोणत्याहि संवृत्त (closed) वक्राचें क्षेत्र नेहमी आपल्या डाव्या अंगास ठेवून वक्रावरून चालूं लागला तर त्याने परिलिखित केलेलें क्षेत्रफळ धन समजावें.

१२.१ कोणत्याहि त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढण्याकरिता आताच काढलेल्या मबभ त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्राचा उपयोग करतां येईल.

समजा कखग त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंचे याम ($य_1$, $र_1$), ($य_2$, $र_2$) व ($य_3$, $र_3$) आहेत.

क, ख व ग बिंदू म ला जोडा.



आ. १४

चिन्हें विचारांत घेऊन,

$$\triangle \text{कखग} = \triangle \text{मकख} - \triangle \text{मगख} - \triangle \text{मकग}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\text{य}_1\text{र}_2 - \text{य}_2\text{र}_1) - (\text{य}_3\text{र}_2 - \text{य}_2\text{र}_3) - (\text{य}_1\text{र}_3 - \text{य}_3\text{र}_1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\text{य}_1\text{र}_2 - \text{य}_2\text{र}_1) + (\text{य}_2\text{र}_3 - \text{य}_3\text{र}_2) + (\text{य}_3\text{र}_1 - \text{य}_1\text{र}_3)\}$$

हें सूत्र

$$\triangle \text{कखग} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{य}_1 & \text{र}_1 & 1 \\ \text{य}_2 & \text{र}_2 & 1 \\ \text{य}_3 & \text{र}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

या निश्चायकाच्या रूपांतहि लिहितां येते.

१३ तीन बिंदूंची संरेखता (collinearity)

तीन बिंदू संरेख (collinear) आहेत किंवा नाहीत हें ठरविण्याकरिता त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या व्यंजकाचा उपयोग करतात.

क$(य_1, र_1)$, ख$(य\ ,\ र_2)$, ग$(य_3, र_3)$ हे बिंदू संरेख असल्यास कखग त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ शून्य असतें. उलट कखग त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ शून्य असल्यास क, ख आणि ग संरेख असतात.

म्हणून संरेखतेचा प्रतिबंध (condition)

$$\begin{vmatrix} य_1 & र_1 & १ \\ य_2 & र_2 & १ \\ य_3 & र_3 & १ \end{vmatrix} = (य_1 र_2 - य_2 र_1) + (य_2 र_3 - य_3 र_2) + (य_3 र_1 - य_1 र_3) = ०$$

हा आहे.

उदाहरणसंग्रह १

(१) त्रिकोणाचे शिरोबिंदू $(य_1, र_1)$, $(य_2, र_2)$ व $(य_3, र_3)$ असल्यास त्याच्या प्रकेंद्राचे (centroid) याम काढा.

(२) त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोणाचा अंतर्द्विभाजक (internal bisector) त्यासमोरील बाजूचे संगत (adjacent) बाजूंच्या प्रमाणांत भाजन करतो हें गृहीत धरून अंतर्व्दिभाजकांच्या छेदन-बिंदूचें याम $\dfrac{कय_1 + खय_2 + गय_3}{क + ख + ग}$ आणि $\dfrac{कर_1 + खर_2 + गर_3}{क + ख + ग}$ आहेत हें सिद्ध करा.

[त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांबी क, ख, ग असून त्याच्या शिरोबिंदूंचे याम $(य_1, र_1)$, $(य_2, र_2)$, $(य_3, र_3)$ आहेत.]

(३) $(य_1, र_1)$, $(य_2, र_2)$ आणि $\left(\frac{धय_2 + नय_1}{ध + न}, \frac{धर_2 + नय_1}{ध + न}\right)$

हे बिंदू संरेख आहेत हें सिद्ध करा.

(४) (२, २), (−२, −२) व $(-२\sqrt{३}, २\sqrt{३})$ हे बिंदू एका समभुज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत हें दाखवा.

(५) कोणत्याहि त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ त्यांच्या बाजूंचे मध्यबिंदू जोडून निर्माण होणाऱ्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या चौपट असतें हें सिद्ध करा.

(६) एका त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंचे ध्रुवीय याम $(त्र_1, ऊ_1)$, $(त्र_2, ऊ_2)$ व $(त्र_3, ऊ_3)$ असल्यास त्याचें क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}\{त्र_1 त्र_2$ ज्या $(ऊ_2 - ऊ_1) + त्र_2 त्र_3$ ज्या $(ऊ_3 - ऊ_2)$ $+ त्र_3 त्र_1$ ज्या $(ऊ_1 - ऊ_3)\}$ आहे हें दाखवा.

(७) पुढील ध्रुवीय यामांचे आयत-यामांत रुपांतर कराः–

$\left(३, \frac{प्या}{२}\right), \left(-२, \frac{-प्या}{४}\right), \left(\sqrt{२}, \frac{प्या}{४}\right)$

(८) पुढील आयत–यामांचे ध्रुवीय यामांत रूपांतर करा :–

$(३, ४)$ $(१, \sqrt{३})$, $(-५, १२)$

(९) क (−२, ४) व ख (−६, १२) हे बिंदू जोडणाऱ्या रेषेचे मूलबिंदू कोणत्या निष्पत्तींत भाजन करतो तें काढा; आणि त्याच निष्पत्तींत कख चें अंतर्भाजन करणाऱ्या बिंदूचे याम काढा.

(१०) (−५, १), (५, ५) व (१०, ७) हे बिंदू संरेख आहेत हें सिद्ध करा.

प्रकरण ३ रें

पथ व त्यांचे समीकार. यामांचें रूपांतर.

१४. बीजगणितांत ज्ञात आणि अज्ञात अशा दोन प्रकारच्या राशी असतात.

(१) क, ख, ग, ··· इ० अक्षरांनी दर्शविलेल्या ज्ञात राशी आणि (२) य, र, ल, ··· इ० अक्षरांनी दर्शविलेल्या अज्ञात राशी. अज्ञात राशींचा ज्ञात राशींशीं संबंध जोडून समीकार तयार होतो.

उदाहरणार्थ, कय+खर+गल+घ=० हा य, र आणि ल मधील एकघातीय सामान्यतम (most general) समीकार आहे.

याम रैखिकींत अचल (constant) आणि चल (variable) राशींचें आपणांला काम पडतें. एखाद्या प्रश्नांत ज्या राशीचें मान नेहमी तेंच राहतें तिला 'अचल' राशि म्हणतात, उदा० एखाद्या समतलांतील कोणत्याहि स्थिर बिंदूचे याम किंवा एखाद्या विवक्षित वृत्ताची त्रिज्या या अचल राशी होत. सामान्यतः समतलांतील स्थिर बिंदूंचे याम य, र अक्षरांना पादांक जोडून दर्शवितात; जसें ($य_1, र_1$), ($य_2, र_2$,) ($य_3, र_3$), ... इत्यादि.

एकाच प्रश्नांत जिला अनेक अर्हा असूं शकतात अशा राशीला चल राशि म्हणतात. नित्यशः येणाऱ्या 'चल' राशी म्हणजे निरनिराळया स्थानीं राहूं शकणाऱ्या (उदा० एखाद्या निश्चित मार्गावर फिरणाऱ्या) बिंदूचे याम य आणि र या होत. बिंदूच्या निरनिराळ्या स्थितींनुसार चलमान (moving) बिंदूच्या यामांच्या (म्हणजे य आणि र च्या) निरनिराळ्या अर्हा असतात; (य, र) यामांना बिंदूचे धावी (current)–याम म्हणतात.

१५ पथ :– जेव्हा एखादा बिंदु, नेहमी, दिलेले एक किंवा अनेक प्रतिबंध पाळून फिरतो तेव्हा त्याने रेखिलेल्या मार्गास त्या बिंदूचा पथ म्हणतात.

१५.१ आता आपण चलमान बिंदूचे धावी-याम य आणि र या दोन चल राशींचा संबंध जोडणाऱ्या बैजिक समीकाराचें (equation) रैखिकीने विश्लेषण करूं.

$$य - र = १ \text{.................} (क)$$

हा समीकार विचारांत घ्या.

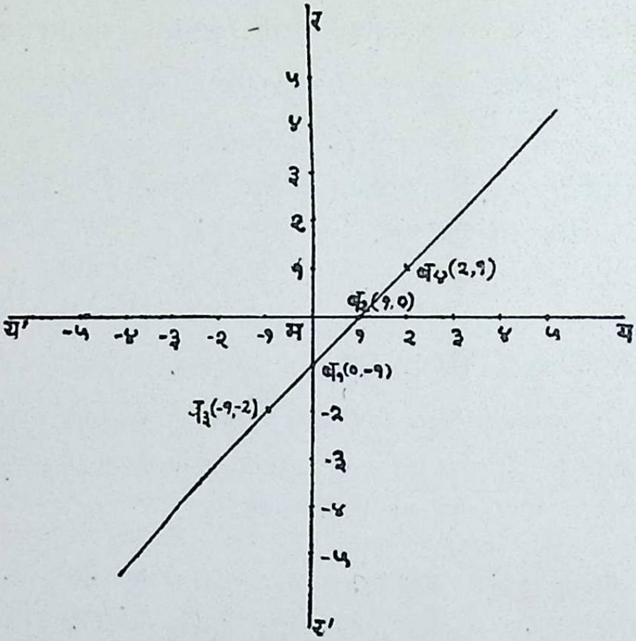
चलमान बिंदूचे धावी याम निरूपणारी य आणि र चीं असंख्य अर्हायुग्में (pairs of values) या समीकाराचें समाधान करतात. यांतलीं कांही युग्में पुढें दिलीं आहेत.

$$\left.\begin{matrix} य = ० \\ र = -१ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} य = १ \\ र = ० \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} य = -१ \\ र = -२ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} य = +२ \\ र = १ \end{matrix}\right| \quad \text{इ० इ०}$$

यावरून असें दिसून येईल की य च्या एका विवक्षित अर्हेशीं र ची एक विवक्षित अर्हा संवादी (corresponding) असते, तसेंच व्यत्यासतःहि.

धावीयाम निरूपणाऱ्या य, र चीं हो अर्हायुग्में समीकार (क) चें समाधान करतात. ज्यांचे याम समीकार (क) चें समाधान करतात अशा $ब_१$, $ब_२$, $ब_३$, $ब_४$, ...इ० सर्व बिंदूंचें आकृतींत दर्शविल्याप्रमाणे अंकन करून ते जोडल्यास एक वक्र (curve) तयार होतो. या उदाहरणांत हा वक्र एक सरळ रेषा आहे हें दिसून येईल.

शिवाय या वक्रावर नसलेल्या कोणत्याहि बिंदूचे याम समीकार (क) चें समाधान करीत नाहीत हेंहि दिसून येईल.



आ. १५

आता हा वक्र म्हणजे (य, र) या चलमान बिंदूने रेखिलेला एक मार्ग आहे असें आपण मानूं शकतों. त्याच्या (य, र) या धावी-यामांचा संबंध जोडणारा (क) हा समीकार असून तो पुढील रैखिकीय नियम व्यक्त करतो :– य, र या यामांमधील फरक नेहमी एक समान राहील अशा रीतीने (य, र) हा बिंदु मार्गक्रमण करतो. दुसऱ्या शब्दांत हा नियम असा सांगतां येईल :— दिलेल्या दोन लंबरेषांपासून मोजलेल्या चलमान बिंदूच्या अंतरांमधील फरक नेहमी १ समान असतो. म्हणून या नियमाप्रमाणे फिरणाऱ्या बिंदूचा पथ वर काढलेली सरळ रेषा होय. समीकार (क) तो पथ निरूपितो. त्यास त्या पथाचा समीकार म्हणतात.

म्हणून य व र युक्त कोणताहि बैजिक समीकार एक पथ निरूपितो आणि त्या पथावरील कोणत्याहि बिंदूचे धावी-याम त्या समीकाराचें समाधान करतात. उलट पथावर नसणाऱ्या दुसऱ्या कोणत्याहि बिंदूचे याम त्याचें समाधान करीत नाहीत.

१५.२ आता आपण दुसऱ्या एका उदाहरणाचा (वृत्ताचा) विचार करूं.

समजा कीं कागदाच्या समतलांत ब हा एक बिंदु, त्या समतलांतील म या स्थिर बिंदूपासून त्याचें अंतर नेहमी क समान अचल राहील अशा प्रतिबंधाने फिरतो. तेव्हा त्याने रेखिलेला पथ क ही त्रिज्या व म हें केंद्र असलेल्या वृत्ताचा (circle) परिघ असतो असें दिसून येतें. या वृत्ताच्या परिघावरील कोणताहि बिंदु दिलेला प्रतिबंध पाळतो. म्हणून वृत्ताचा परिघ ब बिंदूचा पथ होतो.

आता आपण ही रेखिकीय कल्पना बैजिकीने व्यक्त करूं.

(य, र) नेहमी ब या फिरत्या बिंदूचे धावी-याम दर्शवितात हें आपणांस माहीत आहेच. आता आपण, म($य_१$, $र_१$) या स्थिर बिंदूपासून ब(य, र) चें अंतर क समान अचल आहे हा प्रतिबंध ब ला लावूं; अर्थात् ब चें स्थान कोणतेहि असलें तरी

$$\text{मब} = \text{क}$$

पण सूत्रावरून,

$$\text{मब} = \sqrt{(\text{य}-\text{य}_1)^2 + (\text{र}-\text{र}_1)^2}$$

$$\therefore \quad (\text{य}-\text{य}_1)^2 + (\text{र}-\text{र}_1)^2 = \text{क}^2 \quad \cdots \quad (१)$$

हा समीकार बचें कोणतेंहि स्थान असलें तरी सत्य आहे.

ब चे (य, र) हे धावी-याम या समीकाराचें समाधान करतात, म्हणून समीकार (१) ब ने रेखिलेल्या पथाचे बैजिक रीत्या निरूपण करतो. म्हणून या समीकारास बिंदूच्या पथाचा समीकार म्हणण्यास हरकत नाही.

व्यत्यासतः, समीकार (१) चें समाधान करणारे याम असलेले सर्व बिंदू अशा स्थानीं असतात की त्यांपैकी कोणत्याहि बिंदूचें, म अर्थात् ($य_1$, $र_1$) या स्थिर बिंदूपासूनचें अंतर अचल असून क समान असतें. म्हणून ($य_1$, $र_1$) हें केंद्र व क ही त्रिज्या असलेल्या वृत्ताच्या परिघावर हे सर्व बिंदू असले पाहिजेत. दिलेला प्रतिबंध पाळणारे सर्व बिंदू दुसऱ्या कोणत्याहि मार्गावर न राहतां केवळ याच मार्गावर राहूं शकतात. म्हणून या वृत्ताचा परिघ बिंदूचा पथ होतो. हा पथ समीकार (१) ने निरूपिला जातो व त्या समीकारास त्या पथाचा समीकार म्हणतात.

उदा. १:– एक बिंदु एका समतलांत अशा रीतीने फिरतो की त्याच्या (क, ०) व (–क, ०) या बिंदूंपासून असलेल्या अंतरांचा योग २ग आहे. तर, $ख^2 = ग^2 - क^2$ असल्यास त्या बिंदूच्या पथाचा समीकार $\frac{य^2}{ग^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ आहे हें दाखवा.

दिलेला प्रतिबंध पाळणाऱ्या चलमान बिंदूंचे याम (य, र) असल्यास

त्याचें (क, ०) पासून अंतर $= \sqrt{(य-क)^2 + र^2}$

व ,, (–क, ०) ,, ,, $= \sqrt{(य+क)^2 + र^2}$

आता या दोन अंतरांचा योग = २ग.

$$\therefore \sqrt{(य-क)^2+र^2} + \sqrt{(य+क)^2+र^2} = २ग$$

दोन्ही पक्षांचा वर्ग करून

$$[(य-क)^2+र^2+२\sqrt{(य^2+र^2+क^2-२कय)(य^2+र^2+क^2+२कय)}$$
$$+(य+क)^2+र^2] = ४ग^2$$

$$\therefore २(य^2+र^2+क^2)-४ग^2 = -२\sqrt{(य^2+र^2+क^2)^2-४क^2य^2}$$

$न = य^२ + र^२ + क^२$ हा आदेश करून व नंतर २ ने भागून आणि वर्ग करून या समीकाराचें रूप पुढीलप्रमाणे होतें.

$$(न - २ग^२)^२ = (न^२ - ४क^२य^२)$$

किंवा, $$न^२ - ४नग^२ + ४ग^४ = न^२ - ४क^२य^२$$

किंवा, $$क^२य^२ - नग^२ + ग^४ = ०$$

न च्या अर्हेचा आदेश करून

$$क^२य^२ - ग^२(य^२ + र^२ + क^२) + ग^४ = ०$$

किंवा $$(क^२ - ग^२)\,य^२ - ग^२र^२ = ग^२क^२ - ग^४$$

किंवा $$(ग^२ - क^२)\,य^२ + ग^२र^२ = ग^२(ग^२ - क^२)$$

$ग^२(ग^२ - क^२)$ ने साद्यंत भागून

$$\frac{य^२}{ग^२} + \frac{र^२}{ग^२ - क^२} = १$$

किंवा $$\frac{य^२}{ग^२} + \frac{र^२}{ख^२} = १ \qquad (\because ख^२ = ग^२ - क^२)$$

हा पथाचा इष्ट समीकार आहे.

उदा० २ :- $(य_१, र_१)$ व $(य_२, र_२)$ या दिलेल्या दोन बिंदूंपासून सारख्याच अंतरावर असलेल्या बिंदूंच्या पथाचा समीकार काढा.

समजा पथावरील एखाद्या बिंदूचे याम (य, र) आहेत. म्हणून दिलेल्या प्रतिबंधानुसार,

$$\sqrt{(य - य_१)^२ + (र - र_१)^२} = \sqrt{(य - य_२)^२ + (र - र_२)^२}$$

$$\therefore \quad (य - य_१)^२ + (र - र_१)^२ = (य - य_२)^२ + (र - र_२)^२$$

किंवा $$-२यय_१ + य_१^२ - २रर_१ + र_१^२$$
$$= -२यय_२ + य_२^२ - २रर_२ + र_२^२$$

किंवा $२(य_२ - य_१)य + २(र_२ - र_१)र$

$$= (य_२^२ + र_२^२) - (य_१^२ + र_१^२)$$

हा पथाचा इष्ट समीकार आहे.

उदा० ३ :- (१) $र^२ = ४कय$ व (२) $य^२ + र^२ = १६$ या समीकाराचें रैखिकीने निर्वचन (interpret) करा.

ज्या बिंदूच्या कोटीचा वर्ग त्याच्या भुजास ४क ने गुणून येणाऱ्या गुणाकाराइतका असतो अशा बिंदूने निर्माण केलेल्या वक्राचें, समीकार (१) निरूपण करतो.

परंतु कोणत्याहि बिंदूचे य आणि र याम हे त्याचीं अनुक्रमें र व य अक्षांपासून असलेलीं अंतरें असतात. म्हणून य--अक्षापासून असलेल्या बिंदूच्या अंतराचा वर्ग र-अक्षापासूनच्या त्याच्या अंतराच्या ४क पट असतो हा प्रतिबंध समीकार (१) व्यक्त करतो. म्हणून हा प्रतिबंध पाळणाऱ्या पथाचें निरूपण समीकार (१) ने होतें.

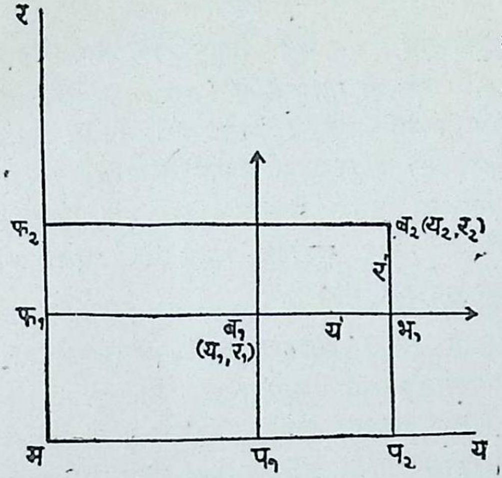
मूलबिंदूपासून कोणत्याहि बिंदूच्या अंतराचा वर्ग १६ आहे. हा प्रतिबंध समीकार (२) च्या द्वारा व्यक्त केला जातो. म्हणून हा प्रतिबंध पाळणाऱ्या बिंदूंच्या पथाचें समीकार (२) ने निरूपण होतें.

१६. यामांची सापेक्षता (Relativity)

कोणत्याहि बिंदूचे याम अक्षांची निवड करण्यावर अवलंबून असतात. निरनिराळ्या अक्षयुग्मांना अनुलक्षून एकाच बिंदूला निरनिराळे याम असतात. अन्य शब्दांत सांगावयाचे म्हणजे, कोणत्याहि बिंदूचे याम निवडलेल्या अक्षद्वयास सापेक्ष असतात.

 BVBSSMV

याचा एक विवक्षित प्रकार खाली दिला आहे.



आ. १६

मय व मर या अक्षांना अनुलक्षून $ब_1$ व $ब_2$ या बिंदूंचे याम अनुक्रमें ($य_1$, $र_1$) व ($य_2$, $र_2$) आहेत. $ब_1$ बिंदूंतून नवीन अक्ष मूळच्या अक्षांना समांतर काढले. नवीन अक्षांना अनुलक्षून $ब_2$ चे याम (य', र') असल्यास

$$य' = ब_1 भ_1 = प_1 प_2 = मप_2 - मप_1 = य_2 - य_1.$$

$$\text{आणि } र' = भ_1 ब_2 = फ_1 फ_2 = मफ_2 - मफ_1 = र_2 - र_1.$$

$$\therefore \quad य_2 = य' + य_1$$

$$र_2 = र' + र_1$$

वरील सूत्रांत ($य_2$, $र_2$) आणि (य', र') हे $ब_2$ या एकाच बिंदूचे जुन्या व नवीन यामाक्षांना अनुलक्षून याम असून ($य_1$, $र_1$) हे नवीन मूलबिंदूचे जुन्या यामाक्षांसंबंधी याम आहेत.

आता समजा की, दिलेल्या अक्षांना अनुलक्षून घेतलेल्या (त, थ) या बिंदूंतून त्यांना समांतर असे नवे अक्ष काढले. एखाद्या बिंदूचे याम मूळच्या व नवीन अक्षांना अनुलक्षून अनुक्रमें (य, र) व (य', र') असल्यास

$$य' = य - त \quad \text{म्हणजे} \quad य = य' + त$$

$$\text{आणि } र' = र - थ \quad \text{म्हणजे} \quad र = र' + थ$$

म्हणून मूलबिंदूचे (त, थ) बिंदूस स्थानांतर करून वर दिलेल्या आदेशांनी एखाद्या वक्राच्या य र मधील समीकाराचें य'र' मधील समीकारांत केव्हाहि रूपांतर करतां येतें. नंतर हा वक्र य', र' वरील प्रास (dashes) काढून टाकून रूपांतरित (transformed) समीकाराने निरूपितां येतो. नंतर नवीन अक्ष हेच यामाक्ष व (त, थ) बिंदु हा नवीन मूलबिंदु धरून यर मधील समीकार हाच त्या वक्राचा समीकार घेतां येतो.

१६.१ अक्षांची निवड ही नेहमी आपल्या हातीं असल्यामुळे ती अशा रीतीने करावी की पथाच्या समीकाराचें रूप सरलतम होईल. असें केलें म्हणजे त्या वक्राच्या गुणांचा अभ्यास करणें सुलभ होतें. हा हेतु साध्य करण्याकरिता त आणि थ च्या योग्य त्या अर्हा घेऊन वरील रूपांतराचा उपयोग कधीकधी करावा. पुढे दिलेल्या उदाहरणावरून हें अधिक स्पष्ट होईल.

उदा० १:– मूलबिंदूचे योग्य त्या बिंदूस स्थानांतर करून पण अक्षांची दिशा तीच ठेवून

$$५य^२ - ६ यर + ५र^२ + २२य - २६र + २९ = ०$$

या समीकाराचें य व र पदांविरहित अशा समीकारांत रूपांतर करा.

समजा की, अक्ष समांतर ठेवन मूलबिंदूचें (त, थ) बिंदूस स्थानांतर केलें.

म्हणून रूपांतरित समीकार

$$[५(य+त)^२ - ६(य+त)(र+थ) + ५(र+थ)^२ + २२(य+त) - २६(र+थ) + २९] = ०$$

किंवा, $[५य^२ - ६\,यर + ५र^२ + २(५त - ३थ + ११)य$
$- २(३त - ५थ + १३)र + ५त^२ + ५थ^२ - ६\,तथ$
$+ त२२ - २६थ + २९] = ०$ —(१)

आतां या समीकारांत य आणि र हीं पदें नसावींत म्हणून

$$\left.\begin{array}{l} ५त - ३थ + ११ = ० \\ ३त - ५थ + १३ = ० \end{array}\right\}$$
व

यांवरून, $त = -१$

$थ = २$

या अर्हांच्या आदेशाने, (१) चें रूपांतर

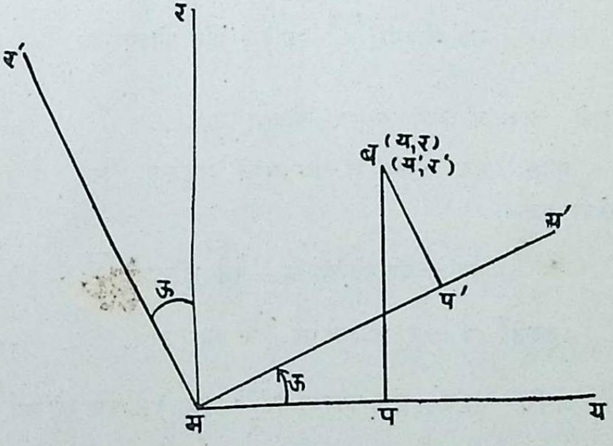
$$५य^२ - ६यर + ५र^२ - ८ = ०$$

यावरून मूलबिंदूचें $(-१, २)$ या बिंदूस स्थानांतर करून पण अक्षांची दिशा तीच ठेवून मूळच्या समीकाराचें

$$५य^२ - ६यर + ५र^२ = ८$$

हें सरळ रूप येतें हें दिसून येईल.

१७ मूलबिंदु तोच ठेवून एका आयत-पद्धतींतून दुसऱ्या आयत-पद्धतींत रूपांतर करणें—(परिभ्रमण).



आ. १७

मय व मर ही अक्षांची मूळ स्थिति असून त्य दिशेने ऊ कोणाइतकें परिभ्रमण केल्यानंतर त्यांची नवीन स्थिति मय' व मर' आहे.

$$\therefore \angle यमय' = \angle रमर' = ऊ$$

समजा की ब बिंदूचे याम मय व मर या अक्षांना अनुलक्षून (य, र) आणि मय' व मर' या अक्षांना अनुलक्षून (य', र') आहेत.

मूळच्या व नूतन अक्षांच्या बप व बप' या कोटी काढा.

$$मग,\ मप = य,\quad पब = र$$

$$आणि\ मप' = य',\ प'ब = र'$$

आता मब, मप' व प'ब यांचे मय वर विक्षेपण करून

$$मप = मप'\ कोज्या\ ऊ + प'ब\ कोज्या\ \left(\frac{प्या}{२} + ऊ\right)$$

$$म्हणजे\ य = य'\ कोज्या\ ऊ - र'\ ज्या\ ऊ \qquad --(१)$$

तसेंच मर वर विक्षेपण करून,

$$पब = मप'\ कोज्या\left(\frac{प्या}{२} - ऊ\right) + प'ब\ कोज्या\ ऊ$$

$$म्हणजे\quad र = य'\ ज्या\ ऊ + र'\ कोज्या\ ऊ \qquad --(२)$$

पुन्हा मब, मप व पब यांचें अनुक्रमें मय' व मर' वर विक्षेपण करून,

$$मप' = मप\ कोज्या\ ऊ + पब\ कोज्या\left(\frac{प्या}{२} - ऊ\right)$$

$$म्हणजे\quad य' = य\ कोज्या\ ऊ + र\ ज्या\ ऊ \qquad —(३)$$

$$आणि\quad प'ब = मप\ कोज्या\ \left(\frac{प्या}{२} + ऊ\right) + पब\ कोज्या\ ऊ$$

$$म्हणजे\quad र' = -य\ ज्या\ ऊ + र\ कोज्या\ ऊ \qquad --(४)$$

समीकार (१) व (२) य' आणि र' करिता सोडविल्यास समीकार (३) व (४) मिळतात.

(१) व (२), आणि (३) व (४) या समीकारांच्या दोन जोड्या पुढे दिलेल्या एकाच सारणीच्या द्वारा दर्शवितां येतात.

	य'	र'
य	कोज्या ऊ	—ज्या ऊ
र	ज्या ऊ	कोज्या ऊ

ही सारणी आडवी किंवा उभी कशीहि वाचतां येते.

१८. आपणांस मूलबिंदू स्थानांतरित करून शिवाय अक्षहि फिरवावयाचे असल्यास इष्ट रूपांतर पुढे दिल्याप्रमाणे दोन प्रक्रमांत (stages) करतां येतें.

(१) प्रथम अक्षांची दिशा न बदलतां मूलबिंदूचें (त, थ) बिंदूस स्थानांतर करणें.

(२) नंतर अक्षांचें ऊ कोणाइतकें परिभ्रमण करणें.

यासाठी आपणांस य व र करिता अनुक्रमें

$$त + य' \text{ कोज्या ऊ} - र' \text{ ज्या ऊ}$$

$$\text{व} \quad थ + य' \text{ ज्या ऊ} + र' \text{ कोज्या ऊ}$$

हे आदेश करावे लागतात.

उदा० १:– मागील अनुच्छेदांतील उदाहरणाचा आपण पुन्हा विचार करूं.

यामाक्षांचें अशा कोणांतून परिभ्रमण करा की $५ य^२ - ६ यर + ५ र^२ - ८ = ०$ च्या रूपांतरित समीकारामध्ये यर हें पद राहणार नाही. परिभ्रमित कोण ऊ असल्यास,

$$य = य' \text{ कोज्या } ऊ - र' \text{ ज्या } ऊ$$

$$\text{व} \quad र = य' \text{ ज्या } ऊ + र' \text{ कोज्या } ऊ$$

समीकारांत हे आदेश करून,

$$५ (य' \text{ कोज्या } ऊ - र' \text{ ज्या } ऊ)^{२} - ६ (य' \text{ कोज्या } ऊ - र' \text{ ज्या } ऊ) \times$$
$$\times (य' \text{ ज्या } ऊ + र' \text{ कोज्या } ऊ) + ५ (य' \text{ ज्या } ऊ + र' \text{ कोज्या } ऊ)^{२}$$
$$- ८ = ०$$

किंवा, $(५ - ६ \text{ ज्या } ऊ \text{ कोज्या } ऊ) य'^{२}$
$$+ (५ + ६ \text{ज्या}ऊ \text{ कोज्या}ऊ) र'^{२} - ६ (\text{कोज्या}^{२} ऊ - \text{ज्या}^{२} ऊ) य'र' = ०$$

यांत $य'र'$ हें पद यावयास नको.

म्हणून $\quad \text{कोज्या}^{२} ऊ - \text{ज्या}^{२} ऊ = ०$

किंवा $\quad \text{कोज्या } ऊ = \text{ज्या } ऊ$

किंवा $\quad ऊ = \frac{\text{प्या}}{४}$

म्हणजे यामाक्षांचें $\frac{\text{प्या}}{४}$ इतकें परिभ्रमण केलें पाहिजे.

समीकारांत $ऊ = \frac{\text{प्या}}{४}$ घेऊन,

$$२य'^{२} + ८र'^{२} = ८$$

किंवा, $$\frac{य'^{२}}{४} + \frac{र'^{२}}{१} = १$$

आता, प्रास काढून टाकून

$$\frac{य^{२}}{४} + \frac{र^{२}}{१} = १$$

हें दिलेल्या समीकाराचें इष्ट सरलतम रूप मिळतें.

उदाहरणसंग्रह २.

(१) एका बिंदूचें दिलेल्या रेषेपासून अंतर आणि त्याचें दिलेल्या रेषेला लंब असणाऱ्या रेषेपासूनचें अंतर यांची निष्पत्ति अचल असल्यास त्या बिंदूच्या पथाचा समीकार काढा.

(२) एका चल बिंदूच्या ($य_1$, ०) व ($-य_1$, ०) या दोन स्थिर बिंदूंपासूनच्या अंतरांच्या वर्गांमधील फरक ४ $क^2$ समान असून अचल आहे. तर त्या बिंदूच्या पथाचा समीकार काढा.

(३) ज्या बिंदूंचें (२, − ३) बिंदूपासूनचें अंतर त्यांच्या (१, २) बिंदूपासूनच्या अंतराच्या ४क पट आहे, त्या बिंदूंच्या पथाचा समीकार काढा.

(४) ज्या बिंदूंच्या दोन दिलेल्या बिंदूंपासूनच्या अंतरांची निष्पत्ति क समान अचल आहे त्या बिंदूंच्या पथाचा समीकार काढा.

(५) ज्या बिंदूच्या दोन दिलेल्या बिंदूंपासूनच्या अंतरांच्या वर्गांचा योग अचल आहे त्या बिंदूच्या पथाचा समीकार काढा.

(६) एका वक्राचा समीकार

$$य^2 + र^2 - ४य - ६र - १२ = ०$$

हा आहे. अक्षांची दिशा न बदलतां मूलबिंदूचें (२, ३) बिंदूस स्थानांतर केल्यास वरील समीकाराचें रूप कोणतें होईल तें काढा.

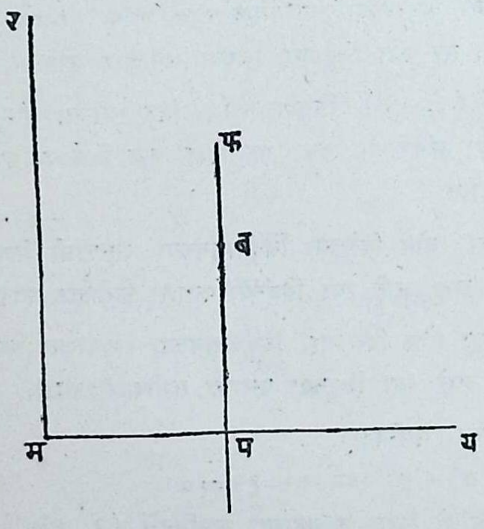
(७) अक्षांचें अ कोणांतून भ्रमण केलें तर य कोज्या अ + र ज्या अ = ल या समीकाराचें रूप य = ल असें होतें हें दाखवा.

(८) एका बिंदूचें य-अक्षापासूनचें अंतर त्याच्या र-अक्षापासूनच्या अंतराच्या ४ पट असल्यास त्या बिंदूच्या पथाचा समीकार काढा.

प्रकरण ४ थें

सरळ रेषा

१९ एका यामाक्षास समांतर असलेल्या सरळ रेषेचा समीकार काढणें.



आ. १८

पफ ही एक सरळ रेषा मर ला म्हणजेच र-अक्षाला समांतर असून य-अक्षाला प बिंदूत छेदते. मप=न आहे असें समजा.

आता पफ रेषेवर ब हा कोणताहि बिंदु घेतल्यास त्याचा भुज किंवा य-याम नेहमी मप (=न) समान होईल.

∴ य=न हा समीकार या रेषेवरील कोणत्याहि बिंदूकरितां सत्य राहील आणि दुसऱ्या कोणत्याहि बिंदूकरिता तो सत्य राहणार नाही.

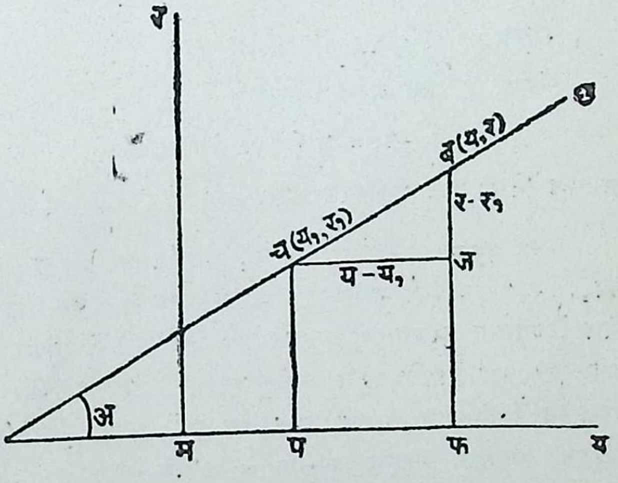
∴ य=न हा समीकार र-अक्षाला समांतर असलेली सरळ रेषा निरूपितो.

न च्या निरनिराळ्या अर्हांकरिता, र-अक्षास आणि म्हणून एकमेकांस समांतर असलेल्या निरनिराळ्या रेषा सुद्धा ह्या समीकाराने निरूपिल्या जातात.

त्याचप्रमाणे, य-अक्षास समांतर असलेली कोणतीहि रेषा, घ एखादा स्थिरांक(constant) असल्यास, र=घ ह्या समीकारानें निरूपिली जाते.

उपसाध्यः- य व र अक्षांचे समीकार अनुक्रमें र=० व य=० आहेत हें सहज दिसून येईल.

२० (य१,र१) या दिलेल्या बिंदूंतून जाणाऱ्या आणि य-अक्षाशीं अ कोणानें अभिनत (inclined) असणाऱ्या सरळ रेषेचा समीकार काढणें.



आ. १९

च(य१, र१) हा दिलेला बिंदु असून, च मधून जाणाऱ्या व य-अक्षाशीं अ कोणानें अभिनत असणाऱ्या चछ या सरळ रेषेवर ब(य, र) हा कोणताहि एक बिंदु आहे.

चज मय ला समांतर काढा.

आकृतीवरून,

$$चज = य - य_1,$$

$$जब = र - र_1$$

$$व \angle जचब = अ$$

आता, चजब या लंबकोण त्रिकोणावरून,

$$\frac{जब}{चज} = स्प\ अ$$

$$\therefore \quad \frac{र - र_1}{य - य_1} = स्प\ अ$$

किंवा, $र - र_1 = स्प\ अ\ (य - य_1)$

किंवा, $स्प\ अ = ध$ घेऊन,

$$र - र_1 = ध\ (य - य_1)$$

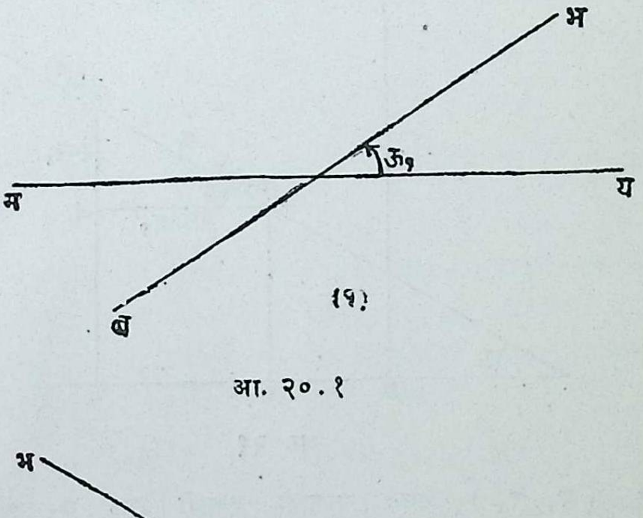
हा चछ रेषेचा इष्ट समीकार आहे.

२०·१ स्प अ=ध असल्यास, $र - र_1 = ध (य - य_1)$ हा समीकार $(य_1, र_1)$ मधून जाणाऱ्या व य-अक्षाच्या धन दिशेशीं अ कोणानें अभिनत असणाऱ्या सरळ रेषेला निरूपितो हें आपण पाहिलेंच आहे. 'ध' च्या निरनिराळया अर्हांनुसार हा समीकार निरनिराळया सरळ रेषांचें निरूपण करील. परंतु या सर्व सरळ रेषा $(य_1, र_1)$ बिंदूतून जातील. म्हणून $र - र_1 = ध\ (य - य_1)$ हा समीकार $(य_1, र_1)$ मधून जाणाऱ्या कोणत्याहि सरळ रेषेचा समीकार आहे असें मानण्यास हरकत नाही. 'ध' ची एखादी विशिष्ट अर्हा या अनेक रेषांपैकी एक विशिष्ट रेषा निश्चित करते.

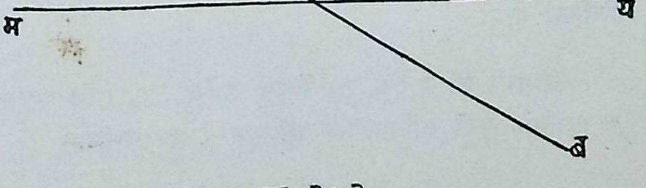
म्हणून $(य_1, र_1)$ मधून जाणाऱ्या सरळ रेषेस आणखी एक प्रतिबंध (उदा० ती दुसऱ्या एका रेषेस लंब किंवा समांतर आहे

असा) पाळावा लागल्यास त्या प्रतिबंधामुळे 'ध' ची एक विशिष्ट अर्हा मिळून रेषेची दिशा माहीत झाल्यामुळे ती रेषा पूर्णपणे निश्चित करतां येते.

२०.२ परिभाषा (definition):— एखाद्या सरळ रेषेने य–अक्षाच्या धन दिशेशीं केलेल्या कोणाच्या स्पर्शज्येस 'त्या रेषेचा प्रवणक (gradient) म्हणतात. सामान्यतः प्रवणक 'ध' अक्षराने दर्शवितात.

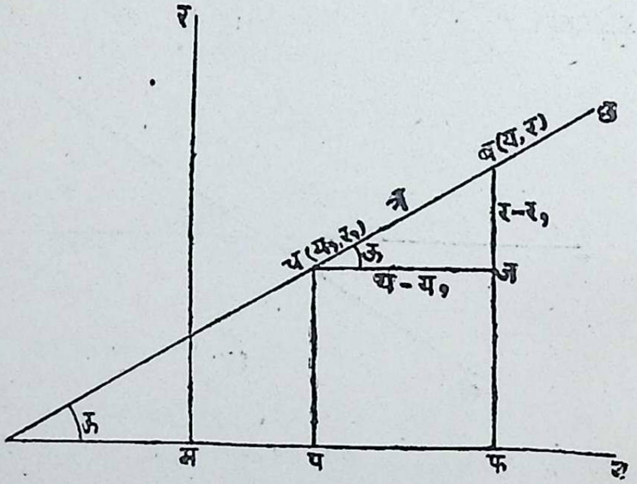


आ. २०.१



आ. २०.२

य–अक्षाची $\overrightarrow{\text{मय}}$ ही दिशा नेहमी धन घेतली जाते, व दिलेल्या रेषेच्या दिशेशीं संपाती होण्यासाठी ज्या कोणांतून प्रतिघटीवत् दिशेने य–अक्षाला फिरवावें लागेल त्याच विशिष्ट कोणाची स्पर्शज्या त्या रेषेचा प्रवणक होईल. आकृति (१) व (२) मध्ये रेषांचे प्रवणक ऊ$_{१}$ व ऊ$_{२}$ या कोणांच्या स्पर्शज्या दाखवितात.



आ. २१

२१ (य$_{१}$, र$_{१}$) मधून जाणारी एखादी रेषा य–अक्षाच्या धन दिशेशीं ऊ कोण करीत असेल किंवा दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचें म्हणजे त्या रेषेचा प्रवणक स्प ऊ असेल तर समीकार पुढील रूपांत लिहितां येतो:—

समजा की ब (य, र) बिंदूचें च (य$_{१}$, र$_{१}$) बिंदूपासूनचें अंतर त्र दर्शविते. पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे चब रेषेचा समीकार

$$र - र_{१} = स्प\ ऊ\ (य - य_{१})$$

किंवा $$\frac{र-र_1}{ज्या\ ऊ}=\frac{य-य_1}{कोज्या\ ऊ}$$

हा आहे.

आता चजव या लंबकोण त्रिकोणावरून यांपैकी प्रत्येक निष्पत्ति समान आहे हें दिसून येईल.

$$\therefore \frac{र-र_1}{ज्या\ ऊ}=\frac{य-य_1}{कोज्या\ ऊ}=त्र$$

किंवा $$\frac{य-य_1}{कोज्या\ ऊ}=\frac{र-र_1}{ज्या\ ऊ}=त्र$$

येथे च ($य_1$, $र_1$) या दिलेल्या बिंदूपासून ब(य, र) चें यथाभूत अंतर त्र आहे हें लक्षांत ठेवावें.

जेव्हा एखाद्या रेषेवरील बिंदूचे याम, त्याचें त्या रेषेंतील एखाद्या स्थिर बिंदूपासूनचें अंतर व त्या रेषेची य-अक्षास असलेली नति (inclination) यांच्या पदांत (in terms of) व्यक्त करावयाचे असतील तेव्हा या रूपाचा विशेष उपयोग होतो.

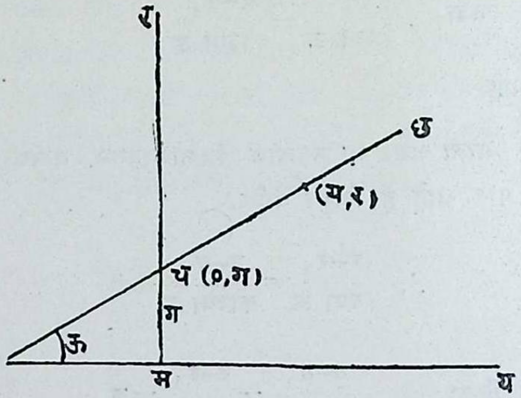
म्हणून एखाद्या रेषेवरील कोणत्याहि बिंदूचे याम

$$य=य_1+त्र\ कोज्या\ ऊ$$

$$र=र_1+त्र\ कोज्या\ ऊ$$

या समीकारांवरून मिळतात.

२२. य-अक्षाशीं ऊ कोणाने अभिनत असणाऱ्या व र-अक्षावर ग इतका अंतःखंड (intercept) करणाऱ्या रेषेचा समीकार.



आ. २२

इष्ट रेषा र-अक्षावर ग हा अंतःखंड करते; म्हणून ती र-अक्षांतील ज्या बिंदूंतून जाते याचे याम (०, ग) असले पाहिजेत.

$र-र_1 =$ स्प ऊ$(य-य_1)$ या समीकारांत $(य_1, र_1)$ च्या जागीं (०, ग) हे आदेश करून,

र–ग = स्प ऊ(य–०)

= स्प ऊ . य

किंवा र–ग = स्प ऊ . य

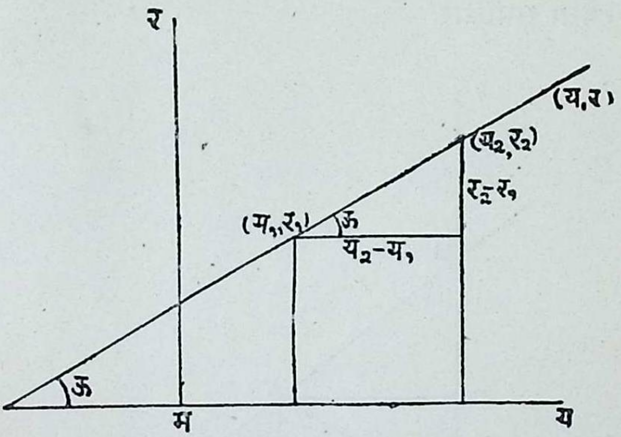
∴ र = स्प ऊ . य + ग

स्प ऊ = ध घेतल्यास

र = धय + ग

हा इष्ट समीकार होय.

२३ $(य_1, र_1)$ व $(य_2, र_2)$ या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार.



आ. २३

स्प ऊ हा इष्ट रेषेचा प्रवणक असल्यास, $(य_1, र_1)$ मधून जाणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$र - र_1 = स्प\ ऊ (य - य_1).$$

आता $(य_2, र_2)$ हा बिंदु या रेषेवर असल्यास त्याचे याम या समीकाराचें समाधान करतात.

$$र_2 - र_1 = स्प\ ऊ (य_2 - य_1)$$

किंवा $$\frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1} = स्प\ ऊ$$

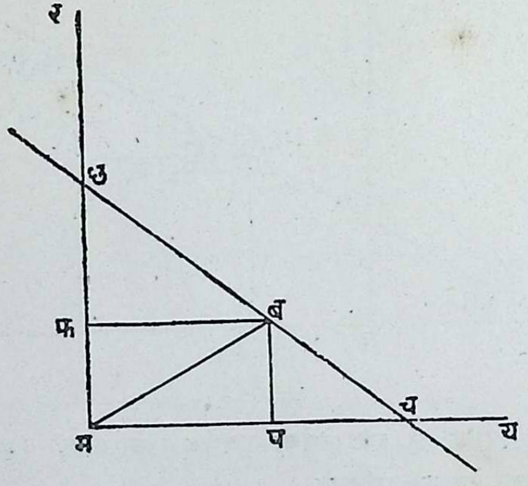
या संबंधाने $(य_1, र_1)$ व $(य_2, र_2)$ यांना जोडणाऱ्या रेषेचा प्रवणक निश्चित होतो.

$$\therefore\quad र - र_1 = \frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1}(य - य_1)$$

हा इष्ट समीकार होय.

२.४ अतःखंड रूप.

य व र अक्षांवर अनुक्रमें क व ख हे अंतःखंड करणाऱ्या रेषेचा समीकार.



आ. २४

चछ रेषा य व र अक्षांवर अनुक्रमें क व ख हे अंतःखंड करते.

$$\therefore \quad मच = क$$

$$मछ = ख.$$

चछ रेषेवर ब(य, र) हा कोणताहि बिंदु घेऊन मब जोडा.

△मचछ चें क्षेत्रफळ = △मचब चें क्षेत्रफळ

+ △मबछ चें क्षेत्रफळ

किंवा, $\frac{1}{2}$ कख = $\frac{1}{2}$ कर + $\frac{1}{2}$ खय (रैखिकीनें)

$$\therefore \quad क . ख = क . र + ख . य$$

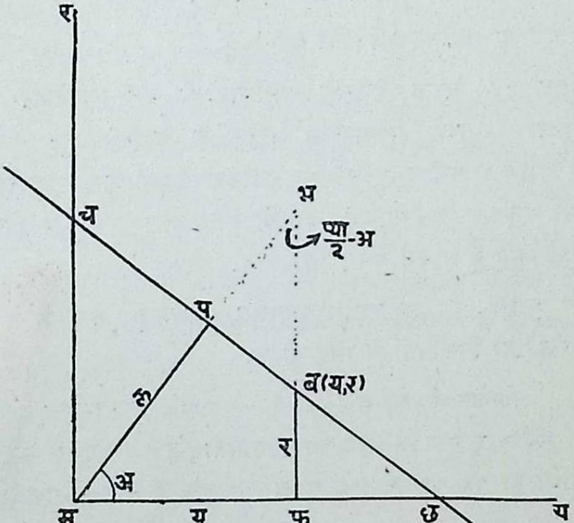
क . ख ने साद्यंत भागून,

$$१ = \frac{र}{ख} + \frac{य}{क}$$

किंवा $\frac{य}{क} + \frac{र}{ख} = १$

हा रेषेचा इष्ट समीकार होय.

२५ मूलबिंदूपासून एखाद्या सरळ रेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी आणि या लंबाने य-अक्षाच्या धन दिशेशीं केलेला कोण यांच्या पदांत रेषेचा समीकार.



आ. २५

मूलबिंदूपासून चछ या सरळ रेषेवर मप हा ल समान लंब असून ∠यमप = ∠छमप = अ.

ब (य, र) हा चछ रेषेवर कोणताहि एक बिंदु आहे. फब ही कोटि काढा.

आता विक्षेपांच्या प्रमेयाने, मप रेषेवर,

मफ चा विक्षेप + फब चा विक्षेप + बप चा विक्षेप

= मप चा मप वरच विक्षेप.

म्हणजे यकोज्या अ + र कोज्या$\left(\frac{\text{प्या}}{२} - \text{अ}\right) + ० = \text{ल}$

$\left(\because \quad \angle \text{मभफ} = \frac{\text{प्या}}{२} - \text{अ}\right)$

$\therefore$ य कोज्या अ + र ज्या अ = ल

हें रेषेच्या समीकाराचें इष्ट रूप आहे.

२६ कोणत्याहि सरळ रेषेच्या समीकारांचीं वर काढलेलीं सर्व रूपें य आणि र मध्ये एकघातीय आहेत हें सहज दिसून येईल. यावरून य आणि र मधील एकघातीय समीकार नेहमी एक सरळ रेषा निरूपितो असें अनुमान काढण्याकडे आपली साहजिकपणे प्रवृत्ति होते. हें विधान सत्य आहे हें आपण आता सिद्ध करूं.

२६·१ य आणि र मधील एकघातीय सामान्य समीकार नेहमी एक सरळ रेषा निरूपितो हें सिद्ध करणें.

समजा की का य + खा र + गा = ० हा सामान्य समीकार आहे. हा समीकार एक विशिष्ट पथ निरूपितो हें आपणांस माहीत आहेच. आता हा पथ म्हणजे एक सरळ रेषा होय हें आपण दाखवूं.

याकरिता पथावर असणारे $(\text{य}_१, \text{र}_१)$, $(\text{य}_२, \text{र}_२)$, $(\text{य}_३, \text{र}_३)$ हे तीन बिंदू विचारांत घ्या. त्यांचे याम पथाच्या समीकाराचें समाधान करतात. म्हणून

$$\text{का य}_१ + \text{खा र}_१ + \text{गा} = ०$$

$$\text{का य}_२ + \text{खा र}_२ + \text{गा} = ०$$

$$\text{का य}_३ + \text{खा र}_३ + \text{गा} = ०$$

का, खा व गा चें निरसन करून,

$$\begin{vmatrix} य_1 & र_1 & 1 \\ य_2 & र_2 & 1 \\ य_3 & र_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

यावरून असें दिसतें की ($य_1$, $र_1$), ($य_2$, $र_2$) व ($य_3$, $र_3$) या तीन बिंदूंनी निर्माण झालेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ शून्य आहे; अर्थात् हे तीन बिंदू संरेख आहेत. या पथावर असणाऱ्या कोणत्याहि तीन बिंदूंकरिता हें विधान सत्य आहे. म्हणून का य + खा र + गा = ० हा समीकार एक सरळ रेषा निरूपितो.

रैखीय समीकार :– य व र मधील एकघातीय सामान्य समीकार नेहमी एक सरळ रेषा निरूपित असल्यामुळे त्यास रेखीय (linear) समीकार असेंहि म्हणतात.

उपसाध्यः– (य, र), ($य_1$, $र_1$) व ($य_2$, $र_2$) या तीन बिंदूंमुळे निर्माण झालेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ विचारांत घेऊन आणि नंतर या तीन बिंदूंच्या संरेखतेचा प्रतिबंध व्यक्त करण्याकरिता हें क्षेत्रफळ शून्या-समान मांडून, आपणांस

$$\begin{vmatrix} य & र & 1 \\ य_1 & र_1 & 1 \\ य_2 & र_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

हा ($य_1$, $र_1$) व ($य_2$, $र_2$) या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार मिळतो.

आता $\begin{vmatrix} य & र & 1 \\ य_1 & र_1 & 1 \\ य_2 & र_2 & 1 \end{vmatrix}$ या निश्चायकाचा

विस्तार केल्यास तो $(य-य_1)(र_1-र_2) - (र-र_1)(य_1-य_2)$

समान आहे हें सहज दिसून येईल. म्हणून $(य_1, र_1)$ व $(य_2, र_2)$ मधून जाणाऱ्या रेषेचा समीकार खाली दिल्याप्रमाणे लिहितां येतो.

$$(य - य_1)(र_1 - र_2) - (र - र_1)(य_1 - य_2) = 0$$

किंवा, $$र - र_1 = \frac{र_1 - र_2}{य_1 - य_2}(य - य_1)$$

$$= \frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1}(य - य_1)$$

हें रूप व अनुच्छेद २३ मध्ये काढलेलें रूप व हीं दोन्ही एकच आहेत हेंहि पर्यायानें दिसून येतें.

२६.२ कोणत्याहि अचल राशीने एखाद्या समीकारास साद्यंत गुणिल्यास तो बदलत नाही.

उदाहरणार्थ, $$क_1 य + ख_1 र + ग_1 = 0 \qquad (१)$$

या समीकारास न या अचल राशीनें साद्यंत गुणून

$$न क_1 य + न ख_1 र + न ग_1 = 0 \qquad (२)$$

हा समीकार मिळतो.

किंवा समीकार (२) ला न ने भागून समीकार (१) मिळतो.

म्हणून समीकार (१) व (२) एकच सरळ रेषा निरूपितात.

व्यत्यासतः, जर एकघातीय दोन समीकार एकच सरळ रेषा निरूपित असतील तर त्यांपैकी एक समीकार दुसऱ्या समीकारास एखाद्या स्थिर राशीने गुणून येणाऱ्या समीकारासमान असला पाहिजे. आणि म्हणून दोहोंतील संवादी गुणकांच्या निष्पत्ती एकच असल्या पाहिजेत.

समजा की

$$क_1 य + ख_1 र + ग_1 = 0 \qquad (१)$$

$$क_2 य + ख_2 र + ग_2 = 0. \qquad (२)$$

हे समीकार एकच सरळ रेषा निरूपितात.

म्हणून दोहोंकरिता प्रवणक 'ध' आणि अंतःखंड 'ग' एकच असलें पाहिजत.

आता (१) चा 'ध' $-\frac{क_1}{ख_1}$ आहे;

व (२) चा 'ध' $-\frac{क_2}{ख_2}$ आहे;

तसेंच (१) चा 'ग' $-\frac{ग_1}{ख_1}$ आहे;

व (२) चा 'ग' $-\frac{ग_2}{ख_2}$ आहे;

$$\therefore \quad -\frac{क_1}{ख_1} = -\frac{क_2}{ख_2} \qquad (३)$$

$$\text{आणि} \quad -\frac{ग_1}{ख_1} = -\frac{ग_2}{ख_2} \qquad (४)$$

(३) वरून, $\frac{क_1}{क_2} = \frac{ख_1}{ख_2}$

व (४) वरून, $\frac{ग_1}{ग_2} = \frac{ख_1}{ख_2}$.

$$\therefore \quad \frac{क_1}{क_2} = \frac{ख_1}{ख_2} = \frac{ग_1}{ग_2}$$

अर्थात् दोन समीकारांतील संवादी गुणकांची निष्पत्ति एकच आहे.

२७. सरळ रेषेच्या एकघातीय सामान्य रूपाचें दुसऱ्या कोणत्याहि विशिष्ट रूपांत सहज रूपांतर करतां येतें हें पुढील अनुच्छेदावरून दिसून येईल.

२७. १ काय+खार+गा=० या एकघातीय सामान्य रूपाचें य कोज्या अ+र ज्या अ=ल या अभिलंब (normal) रूपांत रूपांतर करणें.

$$य \text{ कोज्या } अ + र \text{ ज्या } अ = ल \qquad (१)$$

या समीकारांत, मूलबिंदूपासून रेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी दर्शविणारी राशि ल नेहमी धन घेतात व कोण अ नेहमी ० पासून २ प्या पर्यंत मोजतात.

काय+खार+गा=० हा समीकार

$$काय + खार = - गा \qquad (२)$$

असा लिहितां येतो.

आता, समीकार (१) व (२)] जर एकच सरळ रेषा निरूपित असतील तर दोहोंतील य, र चे गुणक आणि अचल राशि अनुपाती (proportional) असल्या पाहिजेत.

$$\therefore \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{खा}} = \frac{\text{ल}}{-\text{गा}}$$

परंतु समीकार (१) मधील 'ल' नेहमी धन राशि असल्यामुळे आपण काय+खार+गा=० हा समीकार नेहमी अशा रीतीने मांडूं की त्यांतील अचल पद ऋण राहील. याकरिता, जर हें अचल पद आधीच ऋण नसेल तर समीकारांतील सर्व पदांचीं चिन्हें बदलून तो –काय–खार–गा=० असा लिहावा लागेल. म्हणून काय+खार+गा =० हा समीकार नेहमी त्यांतील गा हें अचल पद ऋण राहील अशा रीतीने लिहितात.

आता, $\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{खा}} = \frac{\text{ल}}{-\text{गा}}$ ही प्रत्येक

$$\text{निष्पत्ति} = \frac{\sqrt{\text{कोज्या}^2 \text{अ} + \text{ज्या}^2 \text{ अ}}}{\pm \sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}}$$

$$=\frac{१}{+\sqrt{का^२+खा^२}}$$ आहे.

आपण 'ल' व '–गा' यांचीं चिन्हें धन समजलीं आहेत;

म्हणून $$\frac{ल}{-गा}=\frac{१}{+\sqrt{का^२+खा^२}}$$

ही समता (equality) सत्य राखण्यासाठी $\sqrt{का^२+खा^२}$ च्या करणीचिन्हामागे (radical sign) धन चिन्ह घ्यावें लागेल.

म्हणून, $$कोज्या\ अ=\frac{का}{\sqrt{का^२+खा^२}}$$

$$ज्या\ अ=\frac{खा}{\sqrt{का^२+खा^२}}$$

व $$ल=\frac{-गा}{\sqrt{का^२+खा^२}}$$

म्हणून रेषेचा समीकार

$$\frac{का\,य}{\sqrt{का^२+खा^२}}+\frac{खा\,र}{\sqrt{का^२+खा^२}}=\frac{-गा}{\sqrt{का^२+खा^२}}$$

किंवा $$\frac{का\,य}{\sqrt{का^२+खा^२}}+\frac{खा\,र}{\sqrt{का^२+खा^२}}+\frac{गा}{\sqrt{का^२+खा^२}}=०$$

असा लिहितां येतो.

उदा० १. (१) $\sqrt{३}\,य+र-४=०$

व (२) $\sqrt{३}\,य+र+४=०$

या समीकारांचें अभिलंब रूपांत रूपांतर करा.

संकेतानुसार 'गा' नेहमी ऋण केला पाहिजे. म्हणून समीकार (२)

$$-\sqrt{३}\,य-र-४=०$$

किंवा $$-\sqrt{३}\,य+र=४$$ असा लिहितां येतो.

समीकार (१) व (२) आपण पुढें दिल्याप्रमाणे लिहूं.

$$-\sqrt{३}\,य + र = ४ \qquad (१')$$

$$-\sqrt{३}\,य - र = ४ \qquad (२')$$

प्रथम समीकार (१') चें रूपांतर करूं.

$\sqrt{३ + १}$ किंवा २ ने साद्यंत भागून,

$$\frac{\sqrt{३}\,य}{२} + \frac{र}{२} = \frac{४}{२}$$

$$= २$$

आतां, कोज्या $अ = \frac{\sqrt{३}}{२}$, ज्या $अ = \frac{१}{२}$, $ल = २$.

$$\therefore \qquad अ = \frac{प्या}{६}$$

म्हणून समीकार (१) चें इष्ट रूप

कोज्या $\frac{प्या}{६}$ य + ज्या $\frac{प्या}{६}$ र = २ हें आहे.

तसेंच समीकार (२) ला $\sqrt{३+१}$ साद्यंत भागून,

$$-\frac{\sqrt{३}}{२}\,य - \frac{१}{२}\,र = \frac{४}{२}$$

$$= २.$$

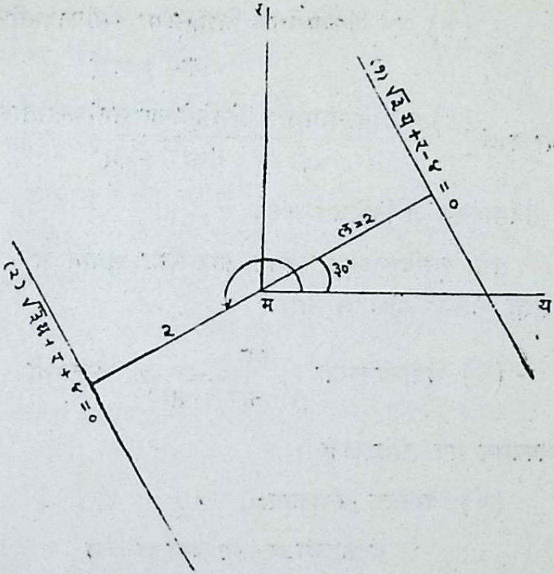
आता, कोज्या $अ' = -\frac{\sqrt{३}}{२}$, ज्या $अ' = -\frac{१}{२}$, $ल = २$.

$$\therefore \qquad अ' = \frac{७\,प्या}{६}$$

म्हणून समीकार (२) चें इष्ट रूप

कोज्या $\frac{७\,प्या}{६}$. य + ज्या $\frac{७\,प्या}{६}$. र = २

हें होय.



आ. २६

समीकार (१) व (२) नी निरूपिलेल्या दोन रेषा बाजूच्या आकृतींत दाखविल्या आहेत.

२७.२ नियम :- काय+खार+गा=० या सामान्य समीकाराचें य कोज्या अ +र ज्या अ - ल=० या अभिलंब रूपांत रूपांतर करण्याकरितां खाली दिलेल्या क्रमाचा अवलंब करावा.

(१) काय+खार+गा=० हा समीकार अशा रीतीने लिहा कि गा हें अचल पद ऋण होईल.

(२) $\sqrt{(\text{य चा गुणक})^{2}+(\text{र चा गुणक})^{2}}$ ने साद्यंत भागा व करणीमागे धन चिन्ह घ्या. हें मूळ नेहमी $+\sqrt{\text{का}^{2}+\text{खा}^{2}}$ घेतात.

(३) कोज्या अ

$$= \frac{(१) \text{ मधे दिल्याप्रमाणे लिहिलेल्या समीकारांतील य चा गुणक}}{\sqrt{\text{का}^२ + \text{खा}^२}}$$

$$\text{व ज्या अ} = \frac{(१) \text{ मधे दिल्याप्रमाणे लिहिलेल्या समीकारांतील र चा गुणक}}{\sqrt{\text{का}^२ + \text{खा}^२}}$$

या संबंधावरून अ निश्चित करा.

येथे मूलबिंदूपासून रेषेवर काढलेल्या लंबाने य – अक्षाच्या धन दिशेशीं केलेला कोण 'अ' आहे.

(४) लंबाची लांबी $\frac{\text{गा}}{\sqrt{\text{का}^२ + \text{खा}^२}}$ असून ती अवश्यमेव धन राशि आहे.

(५) यानंतर समीकार

$$\text{य कोज्या अ} + \text{र ज्या अ} = \text{ल}$$

किंवा $$\text{य कोज्या अ} + \text{र ज्या अ} - \text{ल} = ०$$

या रूपांत लिहोतां येईल.

२८. अनन्ती सरळ रेषा.

$$\text{काय} + \text{खार} + \text{गा} = ० \qquad (१)$$

या समीकाराचें

$$\frac{\text{य}}{-\frac{\text{गा}}{\text{का}}} + \frac{\text{र}}{-\frac{\text{गा}}{\text{खा}}} = १ \qquad (२)$$

या अंत.खंड--रूपांत रूपांतर करून असें दिसून येतें की रेषा (१) ने य वर्र–अक्षांवर केलेले अंतःखंड अनुक्रमें $-\frac{\text{गा}}{\text{का}}$ व $-\frac{\text{गा}}{\text{खा}}$ आहेत.

आता, का, खा आणि गा यांपैकी केवळ का च शून्यप्रवृत्त होत असल्यास य–अक्षावरील अंत:खंड अनंताइतका (infinite) मोठा होतो आणि समीकार र = अचल या रूपांत येतो. हा समीकार य – अक्षास समांतर असलेली एक सरळ रेषा निरूपितो हें आपण मागेंच पाहिलें आहे.

त्याचप्रमाणे केवळ खा च (पण का आणि गा नव्हे) शून्य-प्रवृत्त होत असल्यास येणारी सरळ रेषा र – अक्षास अनंत अंतरावर मिळते व म्हणून ती र – अक्षास समांतर होते.

जर का व खा (पण गा नव्हे) दोन्हीहि शून्यप्रवृत्त होत असतील तर य व र या दोन्ही अक्षांवरील अंत:खंड अधिकाधिक मोठे होत जातात व येणारी रेषा दोन्ही अक्षांना अनंत अंतरावर मिळते. म्हणून ०.य+०.र+गा = ० ही सरळ रेषा पूर्णत: अनंतावर असते हिला अनंती रेषा (line at infinity) म्हणतात.

उदाहरणसंग्रह ३

(१) एक चल सरळ रेषा एका स्थिर बिंदूतून जाते. तर तिच्या यामाक्षांनी खंडित केलेल्या भागाच्या मध्यबिंदूचा पथ काढा.

(नागपूर १९२८)

(२) क (—४,६) या दिलेल्या बिंदूतून जाणारी कपफ ही चल रेषा मय व मर रेषांना प व फ बिंदूंत छेदते. पक वर भ हा असा बिंदु घेतला की पभ = $\frac{१}{४}$ पफ. तर पफ च्या सर्व स्थितींकरिता भ चा पथ काढा. (नागपूर १९२७)

(३) क (१,—५), ख (४,—३), ग (—७,—२) हे शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढा. तसेंच खग बाजूचा समीकार

आणि क पासून खग वर असलेल्या लंबाचीं लांबी काढा.

(आंध्र १९४०)

(४) ३ य + ४ र − २ = ० व ३ य + ४ र − ७ = ० हे एका समांतर रेषायुग्माचे समीकार आहेत. त्यांचें य कोज्या अ + र ज्या अ = ल या रूपांत रूपांतर करा. यावरून किंवा अन्यथा या दोन रेषांमधील अंतर काढा. (आंध्र १९४१)

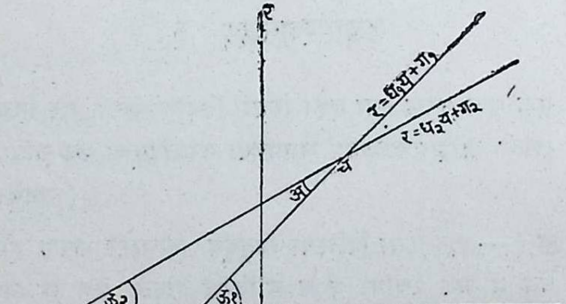
(५) खालील बिंदुयुग्मांमधून जाणाऱ्या रेषांचे समीकार काढा.
(०,०) व (१,२); (२,४) व (३,५); (−३,४) व (−२,−३)

---

२९. दोन सरळ रेषांमधील कोण.

$$र = ध_१ य_१ + ग_१ \quad व \quad र = ध_२ य + ग_२$$

हे समीकार छच व जच या रेषा निरूपितात.



आकृति २७

आकृतीवरून दिलेल्या दोन रेषांमधील अ हा कोण $ऊ_१ - ऊ_२$ समान आहे हें सहज दिसून येईल.

$$\therefore \text{अ} = \text{ऊ}_1 - \text{ऊ}_2$$

$$\therefore \text{स्प अ} = \text{स्प}(\text{ऊ}_1 - \text{ऊ}_2)$$

$$= \frac{\text{स्प ऊ}_1 - \text{स्प ऊ}_2}{1 + \text{स्प ऊ}_1 \text{ स्प ऊ}_2}$$

पण स्प $\text{ऊ}_1 = \text{ध}_1$ आणि स्प $\text{ऊ}_2 = \text{ध}_2$

$$\therefore \text{स्प अ} = \frac{\text{ध}_1 - \text{ध}_2}{1 + \text{ध}_1 \text{ध}_2}$$

$$\therefore \text{अ} = \text{स्प}^{-1} \left(\frac{\text{ध}_1 - \text{ध}_2}{1 + \text{ध}_1 \text{ ध}_2} \right)$$

टीप :-- कोणत्याहि संख्यात्मक उदाहरणांत $\frac{\text{ध}_1 - \text{ध}_2}{1 + \text{ध}_1 \text{ ध}_2}$ ही राशि धन असेल तर ती रेषांमधील न्यूनकोणाची स्पर्शज्या असते व ऋण असेल तर ती रेषांमधील अधिककोणाची स्पर्शज्या असते.

उपसाध्य १ :- समांतर रेषा.

$$\because \text{ध}_1 = \text{ध}_2 \text{ असल्यास स्प अ} = 0$$

$$\therefore \text{अ} = 0$$

म्हणून $\text{र} = \text{ध}_1 \text{य} + \text{ग}_1$ व $\text{र} = \text{ध}_2 \text{य} + \text{ग}_2$ या दोन रेषांमधील कोण शून्य आहे; अर्थात् $\text{ग}_1 \neq \text{ग}_2$ व $\text{ध}_1 = \text{ध}_2$ असतांना या रेषा समांतर असतात. जर $\text{ग}_1 = \text{ग}_2$ असेल तर दोन्ही रेषा संपाती असतात.

म्हणून दोन रेषांच्या समांतरतेचा (parallelism) प्रतिबंध $\text{ध}_1 = \text{ध}_2$ हा आहे.

उपसाध्य २ :— दोन रेषांमधील कोण स्प $\text{अ} = \frac{\text{ध}_1 - \text{ध}_2}{1 + \text{ध}_1 \text{ ध}_2}$ या संबंधापासून मिळतो.

जर $\text{अ} = 90^\circ$ तर दिलेल्या दोन रेषा एकमेकाला लंब असतात.

आता अ=९०° असल्यास स्प अ=∞

$$\therefore \frac{ध_१ - ध_२}{१ + ध_१ ध_२} = \infty$$

किंवा $१ + ध_१ ध_२ = ०$

$\therefore \quad ध_१ ध_२ = -१$

म्हणून दोन रेषांच्या लंबतेचा (perpendicularity) प्रतिबंध $ध_१ ध_२ = -१$ हा आहे.

उपसाध्य ३ :– का य + खा र + गा = ० व

का′य + खा′र + गा′ = ० या रेषा

(१) जर $\frac{का}{खा} = \frac{का'}{खा'}$

किंवा का खा′ − का′खा = ० असेल तर समांतर असतात; आणि

(२) जर का का′ + खा खा′ = ० असेल तर त्या एकमेकाला लंब असतात. ह्याची सिद्धता विद्यार्थ्यांवर अभ्यास म्हणून सोपविली आहे.

२९.१ दिलेल्या सरळ रेषेला लंब असणाऱ्या सरळ रेषेचा सामान्य समीकार.

समजा की दिलेल्या रेषेचा समीकार

का य + खा र + गा = ० (१)

हा आहे.

आता ना ची अर्हा कोणतीहि असली तरी

खाय − कार + ना = ० (२)

ही रेषा (१) ला नेहमी लंब असते हें आपण सिद्ध करूं.

रेषा (१) आणि (२) यांचे 'ध' अनुक्रमें $-\frac{का}{खा}$ आणि $\frac{खा}{का}$ आहेत.

म्हणून त्यांच्या 'घ' चा गुणाकार — १ च्या समान आहे.

म्हणून रेषा (१) आणि (२) परस्परांना लंब आहेत.

म्हणून ना च्या निरनिराळ्या अर्हानुसार समीकार (२), (१) ला लंब असलेल्या निरनिराळ्या सरळ रेषांचें निरूपण करील.

२९.२ नियम :– दिलेल्या रेषेला लंब असलेल्या रेषेचा समीकार मांडण्यासाठी दिलेल्या रेषेच्या समीकारांत य व र च्या गुणकांची अदलाबदल करा, त्यांतील एकाचें चिन्ह बदला व एक स्वेच्छ (arbitrary) अचल राशि घ्या.

स्वेच्छ राशीला कांही विशिष्ट अर्हा देऊन दिलेल्या रेषेला लंब असणाऱ्या एखाद्या विवक्षित रेषेचा समीकार मांडतां येतो.

३०. दोन रेषांना छेदनबिंदूचे याम काढणें

समजा की $ठ_१$ व $ठ_२$ या दोन दिलेल्या रेषांचे समीकार

$$क_१ य + ख_१ र + ग_१ = ० \quad (१)$$

$$क_२ य + ख_२ र + ग_२ = ० \quad (२)$$

हे आहेत.

$ठ_१$ वरील कोणत्याहि बिंदूचे याम समीकार (१) चें व $ठ_२$ वरील कोणत्याहि बिंदूचे याम समीकार (२) चें समाधान करतात. म्हणून $ठ_१$ व $ठ_२$ या दोहोंनाहि साधारण असणाऱ्या बिंदूचे याम, म्हणजेच $ठ_१$ व $ठ_२$ यांच्या छेदनबिंदूचे याम समीकार (१) व (२) चें युगपततः (simultaneously) समाधान करतात. म्हणून समीकार (१) व (२) यांचें समाधान करणाऱ्या य व र च्या अर्हा याच छेदनबिंदूचे याम होत. (१) व (२) वज्रगुणनाने (crossmultiplication) सोडवून हे याम काढतां येतात.

$${}_१ य + ख_१ र + ग_१ = ०$$

$$क_२ य + ख_२ र + ग_२ = ०$$

$$\therefore \quad \frac{य}{ख_१ ग_२ - ग_१ ख_२} = \frac{र}{ग_१ क_२ - क_१ ग_२} = \frac{१}{क_१ ख_२ - क_२ ख_१}$$

किंवा, $$य = \frac{ख_१ ग_२ - ग_१ ख_२}{क_१ ख_२ - क_२ ख_१}$$

व $$र = \frac{ग_१ क_२ - क_१ ग_२}{क_१ ख_२ - क_२ ख_१}$$

हे छेदनबिंदूचे इष्ट याम आहेत.

यावरून जर $क_१ ख_२ - क_२ ख_१ \neq ०$

तर रेषांचा छेदनबिंदु एक परिमित (finite) बिंदु असतो; परंतु जर $क_१ ख_२ - क_२ ख_१ = ०$ असेल व अंश (numerator) जर शून्य नसेल तर छेदनबिंदु अनंतावर असतो. अन्य शब्दांत सांगावयाचे म्हणजे दोन रेषा अनंतावर मिळतात म्हणजेच त्या समांतर असतात.

३१. दोन सरळ रेषांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या सरळ रेषेचा समीकार.

समजा की दिलेल्या दोन रेषांचे समीकार

$$ठ_१ \equiv क_१ य + ख_१ र + ग_१ = ० \qquad (१)$$

$$\text{व} \quad ठ_२ \equiv क_२ य + ख_२ र + ग_२ = ० \qquad (२)$$

हे आहेत.

यांचा छेदनबिंदु दोन्ही रेषांवर असल्यामुळे त्याचे याम समीकार (१) व (२) चे युगपतत: समाधान करतात.

म्हणून या बिंदूचे याम, ऋ कोणतोहि अचल राशी असल्यास,

$$ठ_१ + ऋ ठ_२ = ०$$

अर्थात् $(क_१ य + ख_१ र + ग_१) + ऋ (क_२ य + ख_२ र + ग_२) = ०$ (३)

या समीकाराचेंहि, ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता, ऐकात्म्यतः (identically) समाधान करतात.

आता समीकार (३) एकघात–समीकार असल्यामुळे तो सरळ रेषा निरूपितो. ही सरळ रेषा ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता (१) व (२) यांच्या छेदनबिंदूंतून जाते.

आता समीकार (३) च्या योगें, (१) आणि (२) यांच्या छेदनबिंदूंतून जाणारी कोणतीहि रेषा निरूपिली जात असल्यामुळे, ऋ या अचल राशीला योग्य अर्हा दिल्यास, त्या बिंदूंतून जाणारी एखादी विवक्षित रेषा निश्चित करतां येते.

३२. दिलेल्या तीन रेषा एकाच बिंदूतून जाण्याकरिता प्रतिबंध काढणें

समजा की दिलेल्या रेषा

$$ठ_1 \equiv क_1 य + ख_1 र + ग_1 = 0 \qquad (१)$$

$$ठ_2 \equiv क_2 य + ख_2 र + ग_2 = 0 \qquad (२)$$

$$ठ_3 \equiv क_3 य + ख_3 र + ग_3 = 0 \qquad (३)$$

या समीकारांनी निरूपिल्या असून त्या $(य_1, र_1)$ या साधारण बिंदूतून जातात.

आता साधारण बिंदूचे याम समीकार (१), (२) व (३) चें समाधान करतात.

$$\therefore \quad क_1 य_1 + ख_1 र_1 + ग_1 = 0$$

$$क_2 य_1 + ख_2 र_1 + ग_2 = 0$$

$$क_3 य_1 + ख_3 र_1 + ग_3 = 0$$

$य_1$ व $र_1$ चें निरसन करून

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

दिलेल्या तीन रेषा संगामी (concurrent) असण्याकरिता हा प्रतिबंध आहे.

३२.१ त, थ, द या तीन राशी अशा आहेत कीं, ऐकात्म्यत :,

$$त(क_1 य + ख_1 र + ग_1) + थ (क_2 य + ख_2 र + ग_2) + द (क_3 य + ख_3 र + ग_3) = ०$$

तर, $क_1 य + ख_1 र + ग_1 = ०$, $क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$, $क_3 य + ख_3 र + ग_3 = ०$ या तीन रेषा संगामी आहेत. दिलेला समीकार

$$क_3 य + ख_3 र + ग_3 = -\frac{त}{द} (क_1 य + ख_1 र + ग_1) - \frac{थ}{द} (क_2 य + ख_2 र + ग_2)$$

असा लिहितां येतो. (१)

आता, $क_1 य + ख_1 र + ग_1 = ०$ व $क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$ यांच्या छेदनबिंदूचे याम (३) चा दक्षिणपक्ष नाहीसा करतात. म्हणून तेच याम (१) चा वामपक्ष $क_3 य + ख_3 र + ग_3$ हि नाहीसा करतात. याचा अर्थ असा की $क_1 य + ख_1 र + ग_1 = ०$

$$क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$$

यांचा छेदनबिंदु $क_3 य + ख_3 र + ग_3 = ०$ या तिसऱ्या रेषेवर आहे.

म्हणून दिलेल्या तिन्ही रेषा एकाच बिंदूंत मिळतात.

उदा० :— $य - २ र - २ = ०$ (१)

$३ य - र - ११ = ०$ (२)

या रेषांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या

व $२ य - र - १ = ०$ (३)

या रेषेला लंब असणाऱ्या सरळ रेषेचा समीकार काढा.

रीत १ :– (१) व (२) यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याहि रेषेचा समीकार

$$(य - २ र - २) + ऋ (३ य - र - ११) = ० \cdots\cdots (४)$$

हा आहे.

ही रेषा (३) ला लंब आहे.

म्हणून (३) चा 'ध' व (४) चा 'ध' यांचा गुणाकार – १ समान असला पाहिजे.

आता समीकार (४)

$$(३ ऋ + १) य - (ऋ + २) र - (११ ऋ + २) = ०$$

अशा रीतीने पुन्हा मांडल्यावर त्याचा 'ध', $\frac{३ ऋ + १}{ऋ + २}$ आहे हें सहज दिसून येईल.

परंतु रेषा (३) चा 'ध' = २ आहे.

$$\therefore \quad \frac{३ ऋ + १}{ऋ + २} \cdot २ = - १$$

किंवा, $६ ऋ + २ + ऋ + २ = ०$

किंवा, $७ ऋ + ४ = ०$

$$\therefore \quad ऋ = - \frac{४}{७}$$

समीकार (४) मधे 'ऋ' च्या अर्हेचा आदेश करून,

$$७ (य - २ र - २) - ४ (३ य - र - ११) = ०$$

किंवा, $- ५य - १० र + ३० = ०$

किंवा, $य + २ र - ६ = ०$

हा इष्ट रेषेचा समीकार आहे.

रीत २ :– समीकार (१) व (२) वज्रगुणनाने सोडवून या दोन रेषांच्या छेदनबिंदूचे याम मिळतात.

$$य - २ र - २ = ० \qquad \text{------ (१)}$$

$$३ य - र - ११ = ० \qquad \text{------ (२)}$$

यावरून $\frac{य}{२२-२} = \frac{र}{-६+११} = \frac{१}{-१+६}$

वा $\frac{य}{२०} = \frac{र}{५} = \frac{१}{५}$

$\therefore$ य = ४ व र = १.

आता (४, १) बिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याहि रेषेचा समीकार

$$(र-१) = ध\,(य-४)$$

हा आहे.

ही रेषा (३) ला लंब होण्याकरिता

$$ध \times २ = -१$$

किंवा $ध = -\frac{१}{२}$

या अर्हेचा आदेश करून, इष्ट रेषेचा समीकार

$$(र-१) = -\frac{१}{२}(य-४)$$

किंवा, $२\,(र-१) + (य-४) = ०$

किंवा, $य + २र - ६ = ०$

रीत ३ :– २ य – र – १ = ० या रेषेला लंब असणाऱ्या कोणत्याहि रेषेचा समीकार

$$य + २ र + न = ० \qquad (४)$$

या रूपांत मांडतां येतो. आता न असा निवडावयाचा की ही रेषा (१) व (२) च्या छेदनबिंदूतून जाईल.

अर्थात् (१), (२) व (४) या रेषा संगामी असल्या पाहिजेत. याकरता

$$\begin{vmatrix} १ & २ & न \\ १ & - & -२२ \\ ३ & -१ & -११ \end{vmatrix} = ०$$

विस्तार करून,

$$न = -६.$$

म्हणून इष्ट रेषेचा समीकार

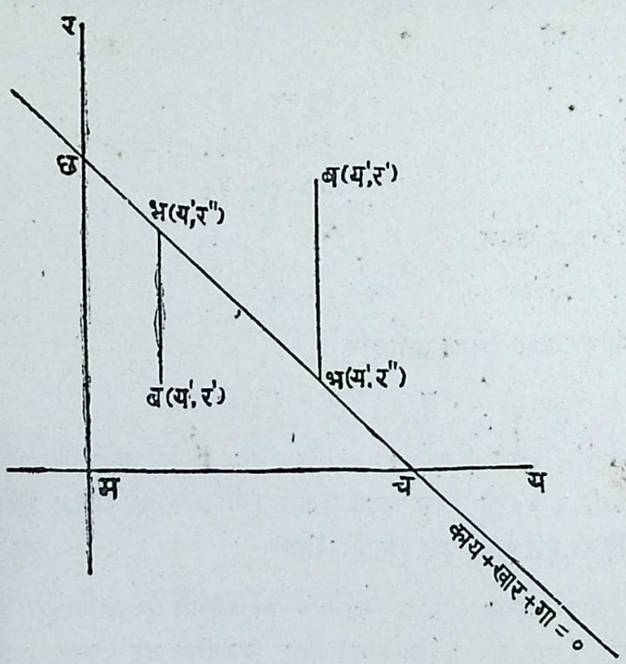
$$य + २र - ६ = ०$$

३३. काय$'$+खार$'$+गा ही राशि धन किंवा ऋण असेल तदनुसार (य$'$, र$'$) हा बिंदु काय+खार+गा=० या सरळ रेषेच्या एका किंवा दुसऱ्या बाजूस असतो. किंवा

जर काय+खार+गा=० या रेषेच्या एकाच बाजूस ($य_१$, $र_१$) व ($य_२$, $र_२$) हे दोन बिंदू असतील तर काय$_१$+खार$_१$+गा आणि काय$_२$+खार$_२$+गा या दोन्ही राशींचीं चिन्हें समान असतात; परंतु ते बिंदू जर रेषेच्या विरुद्ध बाजूस असतील तर या राशींचीं चिन्हें भिन्न असतात.

समजा की चछ ही दिलेली रेषा काय+खार+गा=० आहे, व ब (य$'$, र$'$) हा कोणताहि बिंदु आहे. ब तून बभ र-अक्षास समांतर काढा व तिला दिलेल्या रेषेस भ बिंदूंत मिळूं द्या. समजा की भ चे याम (य$'$, र$''$) आहेत.

दिलेल्या रेषेच्या एका किंवा दुसऱ्या बाजूस ब असेल त्याप्रमाणे बभ र-अक्षाच्या धन वा ऋण दिशेला समांतर काढावी लागेल हें स्पष्टच आहे.



आ. २८

आता र$''$> किंवा <र$'$ असेल

किंवा र$''$−र$'$ धन किंवा ऋण असेल

तदनुसार ब बिंदु दिलेल्या रेषेच्या एका किंवा दुसऱ्या बाजूस राहील. (१)

पण भ (य$'$, र$''$) हा बिंदु काय+खार+गा=० या रेषेवर असल्यामुळे

$$\text{काय}'+\text{खार}''+\text{गा}=0$$

$$\text{किंवा,}\quad \text{र}''+\frac{\text{काय}'+\text{गा}}{\text{खा}}=0$$

$$\therefore \quad र'' - र' = -\frac{काय' + गा}{खा} - र'$$

$$= -\frac{१}{खा}(काय' + खार' + गा) \cdots\cdots (२)$$

आता, (१) आणि (२) वरून,

$र'' - र'$ धन किंवा ऋण असेल

अर्थात् $-\frac{१}{खा}(काय' + खार' + गा)$ धन किंवा ऋण असेल

अर्थात् $(काय' + खार' + गा)$ ऋण किंवा धन असेल

तदनुसार ब बिंदु दिलेल्या रेषेच्या एका किंवा दुसऱ्या अंगाला राहील.

म्हणून $काय_१ + खार_१ + गा$ व $काय_२ + खार_२ + गा$ यांना एकच किंवा भिन्न चिन्हें असतील त्याप्रमाणे $(य_१, र_१)$ व $(य_२, र_२)$ हे कोणतेहि दोन बिंदू $काय + खार + गा = ०$ या रेषेच्या एकाच किंवा विरुद्ध बाजूस असतील.

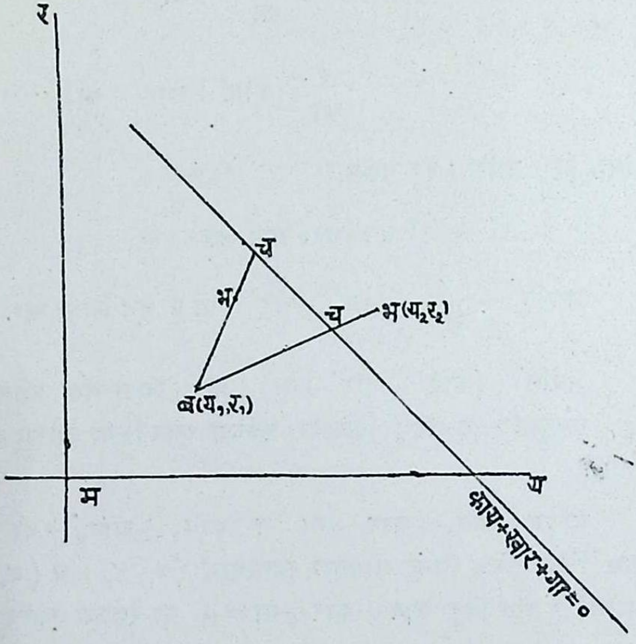
३३.१ अन्यथा :–

ब $(य_१, र_१)$ वभ $(य_२, र_२)$ हे कोणतेहि दोन बिंदू असून यांना जोडणारी रेषा $काय + खार + गा = ०$ या सरळ रेषेस च बिंदूत मिळते. समजा की च मुळे बभ रेषेचे जे दोन भाग होतात त्यांची निष्पत्ति त : थ आहे.

म्हणून च बिंदूचे याम

$$\left(\frac{तय_२ + थय_१}{त + थ}, \frac{तर_२ + थर_१}{त + थ} \right)$$

हे असले पाहिजेत.



आ. २९

पण हा बिन्दु काय + खार + गा = ० या रेषेवर असल्यामुळे

$$\text{का}\,.\,\frac{\text{तय}_2+\text{थय}_1}{\text{त}+\text{थ}} + \;.\;\frac{\text{तर}_2+\text{थर}_1}{\text{त}+\text{थ}} + \text{गा} = 0$$

किंवा, $$\frac{\text{त}}{\text{थ}} = -\frac{\text{काय}_1+\text{खार}_1+\text{गा}}{\text{काय}_2+\text{खार}_2+\text{गा}}$$

आता जेव्हा $\frac{\text{त}}{\text{थ}}$ ही निष्पत्ति धन असते म्हणजेच जेव्हा $\text{काय}_1+\text{खार}_1+\text{गा}$ आणि $\text{काय}_2+\text{खार}_2+\text{गा}$ या राशींचीं चिन्हें विरुद्ध असतात तेव्हा च बिन्दु बभ चें अंतर्भाजन करतो, अर्थात् ब आणि भ हे

बिन्दु दिलेल्या रेषेच्या विरुद्ध बाजूंना राहतात. जेव्हा $\frac{‘त’}{थ}$ ही निष्पत्ति ऋण असते, म्हणजेच जेव्हा काय$_1$+खार$_1$+गा आणि काय$_2$+खार$_2$+गा या राशींचीं चिन्हें एकच असतात, तेव्हा च बिंदु बभ रेषेचे बाह्यतः भाजन करतो अर्थात् ब आणि भ हे दोन बिंदू दिलेल्या रेषेच्या एकाच बाजूस असतात.

म्हणून काय$_1$+खार$_1$+गा व काय$_2$+खार$_2$+गा या व्यंजकांचीं चिन्हें ज्याप्रमाणे एकच किंवा विरुद्ध असतील त्याप्रमाणे (य$_1$, र$_1$) व (य$_2$, र$_2$) हे दोन बिंदु काय+खार+गा = ० या रेषेच्या एकाच किंवा विरुद्ध बाजूस राहतील.

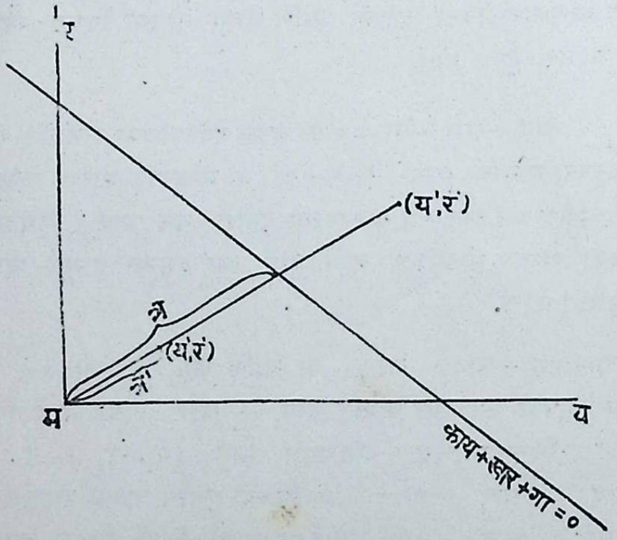
यावरून, जेव्हा एखादा बिंदु काय+खार+गा = ० या सरळ रेषेच्या एका बाजूकडून दुसऱ्या बाजूकडे जातो तेव्हा काय+खार+गा या व्यंजकाचें चिन्ह बदलतें आणि जेव्हा तो त्या रेषेवर असतो तेव्हा हें व्यंजक शून्य होतें.

काय+खार+गा=० या सरळ रेषेच्या ज्या बाजूंतील कोणत्याहि बिंदूच्या यामांचा काय+खार+गा या व्यंजकांत आदेश केला असतां तें व्यंजक धन होतें त्या बाजूस त्या रेषेची धन बाजू म्हणतां येईल, ज्या बाजूंत हें व्यंजक ऋण होतें त्या दुसऱ्या बाजूस ऋण बाजू म्हणतां येईल.

उपसाध्यः– काय$_1$+खार$_1$+गा आणि का. ०+खा. ०+ गा यांचीं चिन्हें एकच असल्यास अर्थात् काय$_1$ + खार$_1$+ गा याचें चिन्ह गा च्या चिन्हाप्रमाणेच असल्यास बिंदु (य$_1$, र$_1$) व मूलबिंदु काय + खार$_1$ + गा=० या रेषेच्या एकाच बाजूस राहतात; उलट काय$_1$ + खार$_1$ + गा आणि गा यांचीं चिन्हें विरुद्ध असल्यास ते दिलेल्या रेषेच्या विरुद्ध बाजूस असतात.

काय + खार + गा = ० हा समीकार गा ऋण होईल अशा रीतीने लिहिल्यास, (उदाहरणार्थ, समीकार अभिलंब रूपांत लिहिल्यास), काय + खार + गा हें व्यंजक, य = ० व र = ० ठेवल्यावर, ऋण होतें; म्हणून मूलबिंदू रेषेच्या ऋण बाजूस राहतो. म्हणून गा ऋण असेल तेव्हा दिलेल्या रेषेमुळे मूलबिंदू विरहित बाजू धन, व मूलबिंदु अंतर्भुत असणारी बाजू ऋण असते. यावरून, प्रत्येक सरळ रेषा समतलाचे एक धन व दुसरा ऋण असे दोन भाग करते.

३३.२ समजा काय + खार + गा = ० ही दिलेली रेषा आहे. सरळ रेषा समतलाचे दोन भागांत विभाजन करते हें आपण मागील अनुच्छेदांत पाहिलें आहे. या दोन भागांपैकी ज्या भागांत मूलबिंदु असतो त्या भागास आपण मूलबिंदु–बाजू म्हणू व दुसऱ्या भागास मूलबिंदु-विरहित–बाजू म्हणं.



आ. ३०

मूलबिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याहि रेषेचा समीकार

$$\frac{\text{य}}{\text{कोज्या ऊ}} = \frac{\text{र}}{\text{ज्या ऊ}} = \text{त्र} \qquad \cdots\cdots\cdots(१)$$

असा लिहितां येतो. या समीकारांत रेषेवरील कोणत्याहि बिंदूचें मूलबिंदूपासूनचें यथाभूत अंतर 'त्र' आहे; म्हणून रेषेवर असणाऱ्या कोणत्याहि बिंदूचे (य', र') हे याम

(त्र कोज्या ऊ, त्रज्या ऊ) असे व्यक्त करतां येतात.

आता रेषा (१) व दिलेली रेषा काय + खार + गा = ० यांच्या छेदनबिंदूचें मूलबिंदूपासूनचें अंतर त्र असल्यास,

का त्र कोज्या ऊ + खा त्र ज्या ऊ + गा = ०

किंवा त्र (का कोज्या ऊ + खा ज्या ऊ) + गा = ० ···(२)

आता समजा की रेषा (१) वरील (य', र') या कोणत्याहि बिंदूचें मूलबिंदूपासूनचें अंतर त्र' आहे.

मग, $\quad$ त्र' $\lessgtr$ त्र $\quad$ असेल

किंवा, त्र' (का कोज्या ऊ + खा ज्या ऊ) $\lessgtr$

त्र (का कोज्या ऊ + खा ज्या ऊ) असेल,

किंवा, त्र' (का कोज्या ऊ + खा ज्या ऊ) + गा $\lessgtr$

त्र (का कोज्या ऊ + खा ज्या ऊ) + गा असेल,

किंवा, त्र' (का कोज्या ऊ + खा ज्या ऊ) + गा $\lessgtr$ ० असेल,

(संबंध (२) वरून)

किंवा, (काय' + खार' + गा) $\lessgtr$ ० असेल,

($\because$ य' = त्र' कोज्या ऊ, र' = त्र' ज्या ऊ)

तदनुसार (य', र') या बिंदु दिलेल्या रेषेच्या मूर्लबिंदु–बाजूस किंवा मूर्लबिंदुविरहित-बाजूस राहील.

आता काय+खार+गा=० ही सरळ रेषा समतलाचे मूर्लबिंदु-बाजू व मूर्लबिंदुविरहित-बाजू या दोन भागांत विभाजन करते. ऊ ला ० पासून ण्या पर्यंत निरनिराळ्या अर्हा देऊन समीकार (१) ने निरूपिलेल्या निरनिराळ्या रेषा विचारांत घेतल्यास वर दिलेल्या कारणपरंपरेने समतलांतील सर्व बिंदूंकरिता वरील विधान सत्य आहे हें दाखवितां येईल.

म्हणून काय+खार+गा=० या दिलेल्या रेषेच्या मूर्लबिंदु-बाजूस किंवा मूर्लबिंदुविरहित-बाजूस (य', र') असेल तदनुसार

काय'+खार'+गा $\lessgtr$ ० होईल.

अन्य शब्दांत सांगावयाचें म्हणजे काय'+खार'+गा ऋण किंवा धन असेल तदनुसार (य', र') हा बिंदु, काय+खार+गा=० या सरळ रेषेच्या मूर्लबिंदु–बाजूस किंवा मूर्लबिंदु विरहित-बाजूस राहील.

३४. **दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या सरळ रेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी काढणें.**

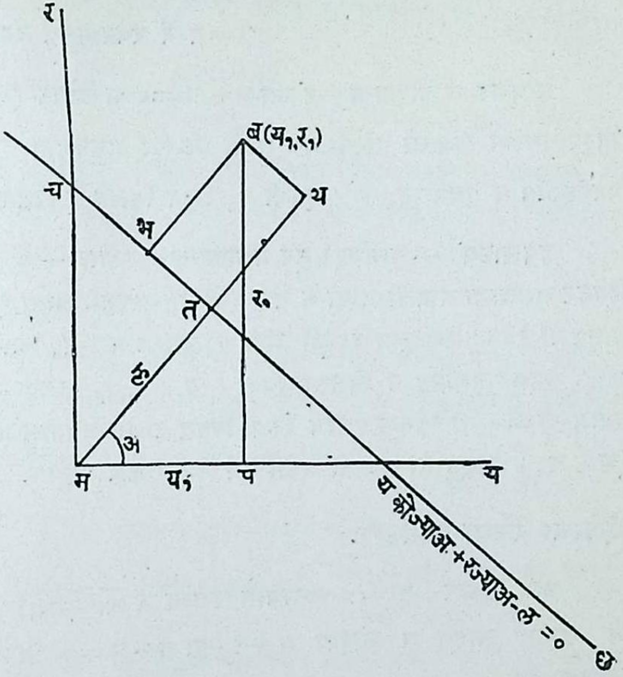
समजा की दिलेली सरळ रेषा चछ य कोज्याअ+रज्याअ—ल=० असून दिलेला बिंदु ब ($य_१$, $र_१$) आहे.

बप ही कोटि काढा.

मतथ आणि बभ, चछ ला आणि बथ, मतथ ला लंब काढा.

∴ मत = ल आ ण. त = भब

आता मप व पब चें मथ वर विक्षेपण करून,



आ. ३१

मप व पब च्या मथ वरील विक्षेपांचा योग

$$=\text{मब चा मथ वरील विक्षेप.}$$

किंवा, $य_1\ \text{कोज्या}\ अ + र_1\ \text{कोज्या}\ \left(\frac{\text{प्या}}{२} - अ\right)$

$$= मथ$$

$$= मत + तथ$$

$\therefore\quad य_1\ \text{कोज्या}\ अ + र_1\ \text{ज्या}\ अ = ल + तथ$

$$= ल + भब$$

$\therefore$ य, कोज्या अ + र, ज्या अ — ल = भंब

= ब चें रेषेपासूनचें लंबांतर.

यावरून, य कोज्या अ + र ज्या अ - ल = ० या रेषेवर (य₁, र₁) बिंदूपासूनच्या लंबाची संख्यात्मक लांबी तिच्या वामपक्षांत असलेल्या पदसंहतींत य ऐवजी य, व र ऐवजी र, ठेवून मिळते हें दिसून येईल.

उपसाध्य :-- मूलबिंदूपासून यकोज्याअ + रज्याअ — ल = ० या रेषेवर असलेल्या लंबाची लांबी ल धन आहे असें समजा. आता (य₁, र₁) पासून या रेषेवर असलेल्या लंबाची लांबी य, कोज्या अ + र, ज्या अ - ल आहे. म्हणून मूलबिंदु व दिलेला बिंदु (य₁, र₁), य कोज्या अ + र ज्याअ - ल = ० या रेषेच्या एकाच किंवा विरुद्ध बाजूस असतील तदनुसार (य₁, र₁) पासूनच्या लंबाची लांबी धन किंवा ऋण राहील.

३४. १. दिलेल्या रेषेचा समीकार.

काय + खार + गा = ० असल्यास त्याला $\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$ ने साद्यंत भागून य कोज्या अ + र ज्या अ - ल = ० या रूपांत आणता येतें.

जसे, $$\frac{\text{काय}}{\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}} + \frac{\text{खार}}{\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}} \frac{\text{ग}}{\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}} = 0$$

म्हणून काय + खार + गा = ० या रेषेवर (य₁, र₁) बिंदूपासून काढलेल्या लंबाची संख्यात्मक लांबी

$$\frac{\text{काय}_1 + \text{खार}_1 + \text{गा}}{\sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}}$$ होईल.

उपसाध्य १:-(य₁, र₁) बिंदु दिलेल्या रेषेच्या एका किंवा दुसऱ्या बाजूस असेल तदनुसार लंबाची लांबी धन किंवा ऋण राहील.

उप. २ :–मूलबिंदूपासूनच्या लंबाची संख्यात्मक लांबी $\frac{गा}{\sqrt{का^2+खा^2}}$ आहे.

उप. ३ :– $\frac{काय_1+खार_1+गा}{\sqrt{का^2+खा^2}}$ आणि $\frac{गा}{\sqrt{का^2+खा^2}}$

या व्यंजकांची चिन्हें एकच किंवा विरुद्ध असतील तदनुसार मूलबिंदु आणि ($य_1$, $र_1$) बिंदु, काय+खार+गा=० या रेषेच्या एकाच किंवा विरुद्ध बाजूस राहतील.

३४ . २ चिन्हांचा संकेतः

दिलेल्या रेषेचा समीकार काय+खार+गा=० हा त्यांतील अचल राशि ऋण राहील अशा रीतीने लिहिल्यास, मूलबिंदूपासून त्या रेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी (जी $\frac{गा}{\sqrt{का^2+खा^2}}$ समान आहे) धन समजली जाते. म्हणून मूलबिंदु व ($य_1$, $र_1$) बिंदु दिलेल्या रेषेच्या एकाच बाजूस असल्यास $\frac{काय_1+खार_1+गा}{\sqrt{का^2+खा^2}}$ हें फल धन होईल, उलट हे बिंदु रेषेच्या विरुद्ध बाजूस असल्यास हें फल ऋण होईल. पहिल्या स्थितींत ($य_1$, $र_1$) पासून काढलेला लंब धन आहे व दुसऱ्या स्थितींत तो ऋण आहे असें म्हणतात.

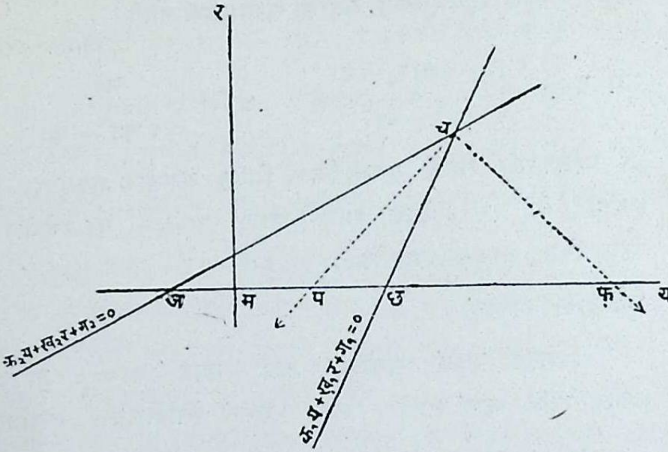
३ . ५ दोन सरल रेषांमधील कोणांचे द्विभाजक.

$$क_1 य + ख_1 र + ग_1 = ०$$
$$क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$$

या रेषांमधील कोणांच्या द्विभाजकांचे समीकार काढणें.

समजा की चछ व चज या रेषा

$$क_1 य + ख_1 र + ग_1 = ०$$
$$क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$$



आ. ३२

या समीकारांनी निरूपिल्या असून त्यांमधील ज्या कोणांत मूलबिंदु आहे त्याचा द्विभाजक चप आणि दुसऱ्या कोणाचा द्विभाजक चफ आहे.

आता $क_1\ य + ख_1\ र + ग_1 = ०$; $क_2\ य + ख_2\ र + ग_2 = ०$ हे समीकार त्यांतील $ग_1$, $ग_2$ हीं अचल पदें ऋण होतील अशा रीतीने लिहा.

चप या द्विभाजकावरील ब या कोणत्याहि बिंदूचे याम (त, थ) असल्यास तो दिलेल्या दोन रेषांपासून समदूर (equidistant) असतो हें आपणांस रैखिकीवरून माहीत आहे.

म्हणून (त, थ) पासूनच्या $क_1 य + ख_1 र + ग_1 = ०$ व $क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$ या रेषांवरील लंबाच्या लांबी, अनुक्रमें $\frac{क_1\ त + ख_1\ थ + ग_1}{\sqrt{क_1^2 + ख_1^2}}$ व $\frac{क_2\ त + ख_2\ थ + ग_2}{\sqrt{क_2^2 + ख_2^2}}$, एकमेकांसमान

असल्या पाहिजेत. दोन रेषांच्या ज्या बाजूस मूलबिंदु आहे त्याच बाजूस (त, थ) बिंदु घेतल्यास या दोन्ही लंबांच्या लांबी धन होतील.

म्हणून चप द्विभाजकावर (त, थ) कोणताहि बिंदु असल्यास

$$\frac{क_1 त + ख_1 थ + ग_1}{\sqrt{क_1^2 + ख_1^2}} = + \frac{क_2 त + ख_2 थ + ग_2}{\sqrt{क_2^2 + ख_2^2}}$$

म्हणून चप द्विभाजकाचा समीकार

$$\frac{क_1 य + ख_1 र + ग_1}{\sqrt{क_1^2 + ख_1^2}} = \frac{क_2 त + ख_2 र + ग_2}{\sqrt{क_2^2 + ख_2^2}}$$

हा होईल.

पुन्हा, चफ द्विभाजकावरील ब हा कोणताहि बिंदु दिलेल्या दोन रेषांपैकी एका रेषेला (उदा० $क_2 य + ख_2 र + ग_2 = ०$ ला) अनुलक्षून तिच्या ज्या बाजूस मूलबिंदु आहे त्याच बाजूस असतो आणि दुसऱ्या रेषेला अनुलक्षून तो त्या रेषेच्या ज्या बाजूस मूलबिंदु आहे त्याच्या विरुद्ध बाजूस असतो. म्हणून या दोन रेषांवर ब पासूनच्या लंबांच्या लांबी एकमेकांसमान पण विरुद्ध चिन्हांच्या असल्या पाहिजेत.

अर्थात्, ब चे याम (त, थ) असल्यास,

$$\frac{क_1 त + ख_1 थ + ग_1}{\sqrt{क_1^2 + ख_1^2}} = - \frac{क_2 त + ख_2 थ + ग_2}{\sqrt{क_2^2 + ख_2^2}}$$

चफ द्विभाजकावरील (त, थ) या कोणत्याहि बिंदुकरिता हा संबंध सत्य आहे. म्हणून चफ चा समीकार

$$\frac{क_1 य + ख_1 र + ग_1}{\sqrt{क_1^2 + ख_1^2}} = - \frac{क_2 य + ख_2 र + ग_2}{\sqrt{क_2^2 + ख_2^2}}$$

हा आहे.

म्हणून दोन्ही द्विभाजकांचा एकत्रित समीकार, $ग_१$ व $ग_२$ चीं चिन्हें ऋण घेऊन,

$$\frac{क_१य + ख_१र + ग_१}{\sqrt{क_१^२ + ख_१^२}} = \pm \frac{क_२य + ख_२र + ग_२}{\sqrt{क_२^२ + ख_२^२}}$$

अशा रीतीने व्यक्त करतां येतो.

वरचें चिन्ह घेतल्यास हा समीकार मूलबिंदु असलेल्या कोणाच्या द्विभाजकाचें निरूपण करतो. परंतु खालचें चिन्ह घेतल्यास तो मूलबिंदु-रहित कोणाच्या द्विभाजकाचें निरूपण करतो.

उदा० ४ य − ३ र + ५ = ० (१)

५ य + १२र − ४ = ० (२)

या सरळ रेषांच्या कोणद्विभाजकांचे समीकार काढा.

अचल पदांची चिन्हें एकच (उदा० ऋण) होतील अशा रीतीने दोन्ही समीकार लिहून.

− ४ य + ३ र − ५ = ०

५ य + १२र − ४ = ०

म्हणून मूलबिंदु असलेल्या कोणद्विभाजकाचा समीकार

$$\frac{-४य + ३ र - ५}{\sqrt{४^२ + ३^२}} = \frac{५ य + १२र - ४}{\sqrt{५^२ + १२^२}}$$

किंवा १३ (−४ य + ३ र − ५) = ५ (५ य + १२ र − ४)

किंवा ७७ य + २१ र + ४५ = ०

दुसऱ्या कोणाच्या म्हणजे मूलबिंदुरहित कोणाच्या द्विभाजकाचा समीकार

$$\frac{-४ य + ३ र - ५}{\sqrt{४^२ + ३^२}} = -\frac{५ य + १२ र - ४}{\sqrt{५^२ + १२^२}}$$

किंवा, $१३ (-४ य + ३ र - ५) = -(५ य + १२ र - ४)$

किंवा, $२७ य - ९९ र + ८५ = ०$

उदाहरणसंग्रह ४

(१) खालील सरळ रेषांमधील कोण काढा :—

(१) $र = ४ य - २;\ ५ र = ३ य + १.$

(२) $र = २ य + ३;\ र = ३ य + २.$

(३) $३ य + ४ र = ७;\ २ य - ३ र = ८.$

(४) $३ य + र = १२;\ य + २ र = १.$

(५) $२ य - ३ र = १;\ ५ र - य = ३.$

(६) $र - \sqrt{३} य - ५ = ०;\ \sqrt{३} र - य + ६ = ०$

(७) $२ य - र = -१;\ ११ य - (८ + ५ \sqrt{३}) र + ५ \sqrt{३} = ०$

(८) $र = \sqrt{३} य + ५;\ र = \frac{१}{\sqrt{३}} य + ५$

(९) $र = घ य + ख;\ (घ - १) य - (घ + १) र = (घ^{२} - १) ख.$

(२) खालील रेषायुग्मांच्या छेदनबिंदूंचे याम काढा :–

(१) $२ य - ३ र + ५ = ०;\ ७ य + ४ र = ३.$

(२) $\frac{य}{क} + \frac{र}{ख} = १;\ \frac{य}{ख} + \frac{र}{क} = १.$

(३) $य$ कोज्या $ए_{१} + र$ ज्या $ए_{१} = क;$
$य$ कोज्या $ए_{२} + र$ ज्या $ए_{२} = क.$

(३) खालील (१) ते (४) बिंदुयुग्मांमधून जाणाऱ्या रेषांचे समीकार काढा :–

(१) (१,०), व $७ य + र - २३ = ०$ आणि $५ य + २ र - १६ = ०$ यांचा छेदनबिंदु.

(२) (३,२), व $२ य + ३ र = १$ आणि $३ य - ४ र = ६$ यांचा छेदनबिंदु.

(३) मूलबिंदु, व $य - र - ४ = ०$ आणि $७ य + र + २ = ०$ यांचा छेदनबिंदु.

(४) (क,ख) व $\frac{य}{क} + \frac{र}{ख} = १$ आणि $\frac{य}{ख} + \frac{र}{क} = १$

यांचा छेदनबिंदु.

(५) (२, ५) मधून जाणाऱ्या व $३ य + ४ र = ९$ या रेषेला लंब असणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा. (मैसूर १९३९)

(६) $२ य + ३ र + ४ = ०$ व $३ य + ४ र - ५ = ०$ यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या आणि $६ य - ७ र + ८ = ०$ ला लंब असणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा. (कलकत्ता १९३०)

(७) $य + २ र + १ = ०$ व $र = य + ७$ यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व $५ य - २ र + ११ = ०$ ला लंब असणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा. (नागपूर १९४२)

(८) $\left.\begin{array}{l} ३ य - र = ० \\ य - २ र = ५ \end{array}\right\}$ आणि

$\left.\begin{array}{l} २५ य + ४१ र - १२ = ० \\ ५ य + ७ र + ९ = ० \end{array}\right\}$ यांच्या छेदनबिंदूंमधून जाणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा. (नागपूर १९४४)

(९) अक्षांवर समान खंड करणाऱ्या आणि $३य - ४र + १ = ०$ व $५य + र - १ = ०$ यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा.

(१०) (४,५) या बिंदुपासून ३ या अंतरावर असणाऱ्या आणि $२ य + ३ र - १२ = ०$ व $३ य - ४ र - १ = ०$ यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा. (आंध्र १९४०)

(४) ३य–र–२० = ० व य–२र–५ = ० यांच्या छेदनबिंदूंतून जाणाऱ्या व मूलबिंदूपासून ५ या अंतरावर असणाऱ्या सरळ रेषांचे समीकार काढा. (नागपूर १९४०)

(५) एक रेषा य व र – अक्षांवर धन अंतःखंड करते; त्यांचें प्रमाण अनुक्रमें ३ : ४ आहे. तो (२, – १) बिंदूंतून जात असल्यास, (३, २) बिंदूपासून या रेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी काढा. (अन्नमलाई १९३३)

(६) (५,३) बिंदूंतून जाणाऱ्या आणि ३ य – र = ० या रेषेला अनुक्रमें लंब व समांतर असणाऱ्या सरळ रेषांचे समीकार काढा. या दोन रेषा व य – अक्ष यांनी बसलेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढा. (आंध्र १९३७)

(७) खाली दिलेल्या रेषांचे समीकार काढा :–

(१) (४,५) मधून जाणारी व र = ५ य + ६ ला समांतर असणारी.

(२) (– ३, ४) मधून जाणारी व २ य – र + ५ = ० ला लंब असणारी. (नागपूर १९३५)

(३) र = ३ य – २ ला लंब असून र – अक्षावर ४ हा अंतःखंड करणारी.

(४) २ य + ३ र + ११ = ० ला समांतर असून तिच्या यामाक्षांवरील अंतःखंडांचा बैजिक योग १५ असणारी.

(५) ४ य + ७ र + ९ = ० ला लंब असणारी व यामाक्षां-बरोबर ३$\frac{१}{२}$ इतकें क्षेत्रफळ असणारा त्रिकोण करणारी.

(६) $\frac{य}{३} + \frac{र}{४}$ = १ ला समांतर असून तिच्यावर मूलबिंदू-पासून असलेला लंब ८ समान असणारी.

(८) पुढे दिलेल्या रेषा संगामी असतात हें सिद्ध करा.

(१) त्रिकोणाच्या बाजूंचे तीन लंबद्विभाजक.

(२) त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूंवर काढलेले तीन लंब.

(३) त्रिकोणाच्या तीन मध्यका.

(४) त्रिकोणाच्या कोणांचे तीन अंतर्द्विभाजक.

(९) (२,−३) बिंदु मूलबिंदूला जोडणारी रेषा ४य + ३र + २ = ० व ६य + ५र + ६ = ० या रेषांशीं संगामी आहे हें सिद्ध करा.

(मैसूर १९३७)

(१०) एक सरळ रेषा अशा प्रतिबंधाने फिरते की तिच्या यामाक्षां-वरील अंत:खंडांच्या व्युत्क्रमांचा योग $-\frac{४}{१५}$ समान राहतो तर ती एका स्थिर बिंदूंतून जाते हें दाखवा व त्या बिंदूचे याम काढा.

(नागपूर १९३८)

(११) ब (त,थ) बिंदु म या मूलबिंदूला जोडणारी रेषा, कय + खर = १ या रेषेला भ बिंदूंत मिळते. तर सिद्ध करा की

$$\frac{बभ}{मभ} = कत + खथ - १$$ (नागपूर १९३३)

(१२) य + र − क = ० आणि य − र + क = ० या रेषांशीं समान कोण करणाऱ्या व त्यांच्याबरोबर $ग^2$ वर्गएकक क्षेत्रफलाचे त्रिकोण करणाऱ्या सरळ रेषांचे समीकार काढा (आंध्र १९३३)

(१३) (अ) कय + खर + ग = ० व तय + थर + द = ० या रेषांमधील कोण काढा.

(आ) मूलबिंदूतून जाणाऱ्या व र = धय + ग या रेषेशीं 'अ' कोण करणाऱ्या सरल रेषांचे समीकार काढा. (नागपूर १९३९)

(१४) पुढे दिलेल्या सरळ रेषांचे समीकार काढा :--

(१) (२, ३) बिंदूंतून जाणारी व ३ य + र − ५ = ० रेषेशीं ४५° चा कोण करणारी. (मैसूर १९४०)

(२) (३, − २) बिंदूंतून जाणारी व √ ३ य + र = १ रेषेशीं ६०° चा कोण करणारी. (बनारस १९३५)

(१५) २ य − र = १ व क य + २ र = ४ या रेषांमधील कोण ४५° चा होण्याकरिता 'क' ची अर्हा काढा. (बनारस १९३०)

(१६) ३ य + ४ र = ५ या रेषचे (२, ६), (४, २) (− १, १२) या प्रत्येक बिंदूपासून अंतर काढा.

(१७) (२, ३) बिंदूपासून

(अ) ४ य + ३ र = ७

(आ) ५ य + १२ र = २०

(इ) १५य − ८ र + ११ = ०

या रेषांवर काढलेल्या लंबांच्या लांबी काढा.

(१८) (२, − १) व (१, १) हे बिंदू ३ य + ४ र = ६ या रेषेच्या विरुद्ध बाजूंना आहेत हें सिद्ध करा.

(१९) ३ य + २ र = ६ आणि २ य − र + २ = ० यांनी तयार झालेल्या समतलाच्या चार विभागांत (१, १), (२, ३) (०, ७) व (− २, ४) हे बिंदु आहेत हें दाखवा.

(२०) (क कोज्या अ, क ज्या अ) व (क कोज्या आ, क ज्या आ) या दोन बिंदूना जोडणाऱ्या रेषेवर मूलबिंदूपासून काढलेल्या लंबाची लांबी काढा.

(२१) र = ध य + क व र = ध य + ख या समांतर रेषांमधील अंतर काढा.

(२२) ($\pm \sqrt{क^२ - ख^२}$, ०) या दोन बिंदुंपासून

$\frac{य}{क}$ कोज्या ऊ + $\frac{र}{ख}$ ज्या ऊ = १ या रेषेवर काढलेल्या लंबांचा

गुणाकार $ख^२$ आहे हें दाखवा.

(२३) य व्युत्कोज्या ऊ + र व्युज्ज्या ऊ = क आणि
य कोज्या ऊ − र ज्या ऊ = क $कोज्या^२$ ऊ या रेषांवर मूलबिंदूपासून
काढलेले लंब अनुक्रमें ल व ल′ असल्यास

$$४ ल^२ + ल'^२ = क^२$$

हें सिद्ध करा.

(२४) पुढील रेषांमधील कोणांच्या द्विभाजकांचे समीकार काढा :–

(१) २४ य + ७ र = २०; ४ य − ३ र = २
(बनारस १९३५)

(२) ३ य + ३ र − २ = ०; य − ७ र + १ = ०
(मैसूर १९४१)

(३) य + २ र + ३ = ०; २ य − र − ५ = ०

(४) ३ य + २ र + २ = ०; १८ य − र − १ = ०

(२५) य − र = ५ व ७ य − र = १ या रेषांमधील अधिककोणांत मूलबिंदु आहे हें दाखवा; आणि त्यांमधील न्यूनकोणाच्या द्विभाजकाचा समीकार काढा.
(आंध्र १९३३)

(२६) एका त्रिकोणाच्या बाजू

३ य + ४ र − ६ = ०
१२ य − ५ र − ३ = ०
४ य − ३ र + १२ = ०

या आहेत तर त्यांच्या अंतःकोणांच्या द्विभाजकांचे समीकार काढा.
(आंध्र १९३५)

(२७) $\left.\begin{array}{r}\text{य} + \text{र} + २ = ०\\ \text{य} - ७\,\text{र} = २\end{array}\right\}$ आणि $\left.\begin{array}{r}६\text{य} + ८\,\text{र} + १३ = ०\\ २\,\text{र} + १ = ०\end{array}\right\}$

या दोन रेषांचे कोणद्विभाजक एकच आहेत हें सिद्ध करा.

सरळ रेषायुग्में

३६. ज्या बिंदूचे याम

$$\text{का य} + \text{खा र} + \text{गा} = ० \qquad (१)$$

या किंवा $\text{का' य} + \text{खा' र} + \text{गा'} = ०$ (२)

या समीकारांचें समाधान करतात, त्याच बिंदूचे याम

$$(\text{का य} + \text{खा र} + \text{गा})\ (\text{का' य} + \text{खा' र} + \text{गा'}) = ० \qquad (\text{अ})$$

याहि समीकाराचें समाधान करतात हें उघड आहे. अर्थात् समीकार (१) किंवा (२) चें समाधान करणाऱ्या सर्व बिंदूंचे याम (अ) चें सुद्धा समाधान करतात. म्हणून (अ) वर असणारा कोणताहि बिंदु एकतर (१) वर किंवा (२) वर असला पाहिजे. म्हणून समीकार (अ), (१) आणि (२) यांनी दिलेलें रेषायुग्म निरूपितो.

आता, $\text{क} = \text{का का'}$, $\quad २\,\text{च} = \text{खा गा'} + \text{खा' गा}$,

$\text{ख} = \text{खा खा'}$, $\quad २\,\text{छ} = \text{गा का'} + \text{गा' का}$,

$\text{ग} = \text{गा गा'}$, $\quad २\,\text{ज} = \text{का खा'} + \text{का' खा}$

घेऊन, ससीकार (अ) मधील दोन्ही खंडांचा (factors) गुणाकार केल्यास, त्याचें रूप

$$\text{क य}^{२} + २\,\text{ज य र} + \text{ख र}^{२} + २\,\text{छ य} + २\,\text{च र} + \text{ग} = ० \qquad (\text{आ})$$

असें होतें.

म्हणून (आ) च्या रूपांत असलेला कोणताहि समीकार त्याच्या वामपक्षांतील व्यंजक का य + खा र + गा आणि का' य + खा' र + गा' यासारख्या दोन रेखीय खंडांचा गुणाकार असल्यास, नेहमी दोन सरळ रेषांचें निरूपण करतो. याकरता क, ख, ग, च, छ, ज या गुणकांमध्ये कोणतातरी संबंध असला पाहिजे. असा संबंध असल्याशिवाय समीकार (आ) सरळ रेषायुग्म निरूपिणार नाही.

समीकार (आ) य आणि र मधील सामान्यतम द्विघातीय समीकार आहे हें लक्षांत ठेवावें.

३७. सामान्यतम द्विघातीय समीकाराने दोन सरळ रेषांचें निरूपण होण्याकरिता प्रतिबन्ध.

समजा की

$$\text{क य}^2 + \text{२ ज य र} + \text{ख र}^2 + \text{२ छ य} + \text{२ च र} + \text{ग} = 0 \quad (१)$$

हा समीकार दोन सरळ रेषा निरूपितो. म्हणून (१) च्या वामपक्षातील व्यंजक, य आणि र मधील दोन रेखीय खंडांच्या गुणाकाराइतकें असलें पाहिजे.

आता (१) हा य चा वर्ग समीकार (quadratic equation) आहे असें धरून,

$$\text{य} = \frac{-(\text{ज र} + \text{छ}) \pm \sqrt{(\text{जर} + \text{छ})^2 - \text{क}(\text{ख र}^2 + \text{२ चर} + \text{ग})}}{\text{क}}$$

यावरून (१) च्या वामपक्षांतील व्यंजक

$$\{\text{क य} + \text{ज र} + \text{छ} + \sqrt{(\text{जर} + \text{छ})^2 - \text{क}\ (\text{ख र}^2 + \text{२ चर} + \text{ग})}\}$$

आणि $\{\text{क य} + \text{ज र} + \text{छ} - \sqrt{(\text{ज र} + \text{छ})^2 - \text{क}\ (\text{ख र}^2 + \text{२ च र} + \text{ग})}\}$

या दोन अवयवांच्या (factors) गुणनफलासमान लिहितां येतें.

आता यांपैकी प्रत्येक अवयव य आणि र मधे रेखीय असला पाहिजे. दोन्ही अवयवांचा 'क य + ज र + छ' हा भाग अगोदरच य व र मध्ये रेखीय आहे; म्हणून संपूर्ण अवयव रेखीय होण्याकरिता अवयवाचा उरलेला भाग म्हणजेच $\sqrt{(\text{ज र} + \text{छ})^2 - \text{क}(\text{ख}\text{र}^2 + २\,\text{च र} + \text{ग})}$ हा सुद्धा य आणि र मध्ये रेखीय असली पाहिजे.

याकरिता, र मध्ये द्विघातीय असलेली करणीगत राशि पूर्ण वर्ग असली पाहिजे. अर्थात् $(\text{ज र} + \text{छ})^2 - \text{क}(\text{ख र}^2 + २\,\text{च र} + \text{ग})$ हा पूर्ण वर्ग असला पाहिजे.

किंवा, $(\text{ज}^2 - \text{क ख})\,\text{र}^2 + २\,(\text{छ ज} - \text{क च})\text{र} + (\text{छ}^2 - \text{क ग})$

हा पूर्ण वर्ग असला पाहिजे.

याकरिता प्रतिबंध

$$४\,(\text{छ ज} - \text{क च})^2 = ४\,(\text{ज}^2 - \text{क ख})(\text{छ}^2 - \text{क ग})$$

किंवा, $$\text{क}^2\text{च}^2 + \text{छ}^2\text{ज}^2 - २\text{कचछज} = \text{छ}^2\text{ज}^2 - \text{कखछ}^2 - \text{कगज}^2 + \text{क}^2\text{खग}$$

हा आहे. आता, दोन्ही पक्षांतून $\text{छ}^2\,\text{ज}^2$ हे साधारण पद काढून टाकून, व क ने भागून हा प्रतिबंध

$$\text{कखग} + २\,\text{चछज} - \text{कच}^2 - \text{खछ}^2 - \text{गज}^2 = ०$$

असा होतो.

हा प्रतिबंध पुढील निश्चयकाच्या रूपांतहि व्यक्त करतां येतो.

$$\begin{vmatrix} \text{क} & \text{ज} & \text{छ} \\ \text{ज} & \text{ख} & \text{च} \\ \text{छ} & \text{च} & \text{ग} \end{vmatrix} = ०$$

३८. मूलबिंदूतून जाणारे रेषायुग्म.

$\text{र} - \text{ध य} = ०$ हा समीकार, ध च्या सर्व अर्हांकरिता, $\text{य} = ०$ आणि $\text{र} = ०$ या रेषांच्या छेदनबिंदूतून अर्थात् मूलबिंदुतून जणाऱ्या सरळ

रेषेचें निरूपण करतो. म्हणून मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या कोणत्याहि सरळ रेषेचा समीकार र − धय = ० या रूपांत असला पाहिजे हें उघड आहे.

म्हणून मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या कोणत्याहि दोन रेषा $र - ध_१ य$ आणि $र - ध_२ य$ यांचें गुणनफल शून्यासमान मांडून मिळतात.

म्हणून त्यांचा एकत्रित समीकार

$$(र - ध_१ य) (र - ध_२ य) = ० \text{ किंवा,}$$

$र^२ - (ध_१ + ध_२)\, यर + ध_१ ध_२ य^२ = ०$ हा होय. (१)

हा य आणि र मध्ये द्विघातीय समानघाती (homogeneous) समीकार आहे हें दिसून येईल.

म्हणून $क य^२ + २ ज य र + ख र^२ = ०$ (२)

या रूपाचा य व र मधील द्विघातीय समानघाती समीकार नेहमी मूलबिंदूंतून जाणारे रेषायुग्म निरूपितो.

[(२) ला ख ने साद्यंत भागिल्यास त्याचें रूप समीकार (१) सारखें होतें.]

३८.१ समजा की $कय^२ + २ जयर + खर^२ = ०$ याने दिलेल्या दोन सरळ रेषा

$$र - ध_१ य = ०$$

आणि $$र - ध_२ य = ०$$

या आहेत.

$$\therefore \quad कय^२ + २ जयर + खर^२ = ख (र - ध_१ य) (र - ध_२ य) = ०$$

$$\therefore \quad ध_१ + ध_२ = - \frac{२ज}{ख}$$

$$ध_१ ध_२ = \frac{क}{ख}$$

३९. अय + आर = ० या समीकारास आने साद्यंत भागून, $ध = - \frac{अ}{आ}$ हा आदेश केल्यास तो र - ध य = ० या रूपांत येतो.

म्हणून अय + आर = ० हा मूलबिंदुंतून जाणाऱ्या कोणत्याहि सरळ रेषेचा सामान्यतम समीकार आहे.

आता $कय^2 + २जयर + खर^2$

$$= क \left[\left(य + \frac{ज}{क} र \right)^2 - \frac{(ज^2 - कख) र^2}{क^2} \right]$$

म्हणून $ज^2 - कख > ०$,

किंवा, $ज^2 - कख = ०$,

किंवा $ज^2 - कख < ०$ असेल

तदनुसार $कय^2 + २ जयर + खर^2$ या व्यंजकाचे अय + आर आणि अ' य + आ' र या रूपांतील वास्तविक आणि भिन्न (distinct) वास्तविक आणि समान, किंवा काल्पनिक (imaginary) अशा दोन खंडांत भाग करतां येतात.

म्हणून $ज^2 - कख > ०$,

किंवा $ज^2 - कख = ०$,

किंवा $ज^2 - कख < ०$ असेल

तदनुसार $कय^2 + जयर + खर^2 = ०$ हा समीकार मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती, किंवा काल्पनिक अशा दोन रेषांचें निरूपण करतो. मधल्या प्रकारांत $कय^2 + २ जयर + खर^2$ व्यंजक पूर्ण वर्ग होते.

म्हणून कोणताहि द्विघातीय समानघाती समीकार मूलबिंदुंतून

जाणाऱ्या भिन्न किंवा संपाती पण वास्तविक, किंवा काल्पनिक अशा दोन सरळ रेषा निरूपितो.

४०. $क य^२ + २ जयर + खर^२ = ०$ ने निरूपिलेल्या दोन सरळ रेषांमधील कोण काढणें.

समजा की वरील समीकाराने निरूपिलेल्या रेषांचे स्वतंत्र समीकार

$$र - ध_१ य = ० \qquad (१)$$

$$व \quad र - ध_२ य = ० \qquad (२)$$

हे आहेत.

$$\therefore (कय^२ + २ जयर + खर^२) = ख (र - ध_१ य) (र - ध_२ य) = ०$$

$$\therefore ध_१ + ध_२ = - \frac{२ ज}{ख}$$

$$आणि \quad ध_१ ध_२ = \frac{क}{ख}$$

आता, (१) व (२) मधील अ कोण, अनु० २९ वरून,

$$स्प \ अ = \frac{ध_१ \backsim ध_२}{१ + ध_१ ध_२}$$

या समीकाराने मिळतो.

$$आता, \ (ध_१ - ध_२)^२ = (ध_१ + ध_२)^२ - ४ ध_१ ध_२$$

$$\therefore ध_१ - ध_२ = \pm \sqrt{(ध_१ + ध_२)^२ - ४ ध_१ ध_२}$$

करणी चिन्ह धन घेऊन,

$$स्प \ अ = \frac{\sqrt{(ध_१ + ध_२)^२ - ४ ध_१ ध_२}}{१ + ध_१ ध_२}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{२ज}{ख}\right)^२ - ४ \frac{क}{ख}}}{१ + \frac{क}{ख}}$$

$$= \frac{२\sqrt{ज^2 - कख}}{क+ख}$$

करणीचिन्ह ऋण घेतल्यास रेषांमधील अधिककोणाची स्पर्शज्या मिळते.

उपसाध्य १:— दिलेल्या दोन सरळ रेषा लंब असल्यास,

$$अ = ९०^\circ$$

$$\therefore \quad स्प\ अ = \infty$$

$$\therefore \quad क + ख = ०$$

उपसाध्य २:-- दिलेल्या दोन सरळ रेषा संपाती असल्यास,

$$अ = ०$$

$$\therefore \quad स्प\ अ = ०$$

$$\therefore \quad ज^2 = कख$$

४१. $कय^2 + २\ जयर + खर^2 + २\ छय + २\ चर + ग = ०$ (१)

हा समीकार दोन सरळ रेषा निरूपित असल्यास

$कय^2 + २\ जयर + खर^2 = ०$ (२)

हा समीकार त्यांना समांतर असलेल्या पण मूलबिंदूतून जाणाऱ्या रेषायुग्माचें निरूपण करतो.

सिद्धता :- समजा

समीकार (१) ≡ (काय + खार + गा) (का'य + खा'र + गा') = ०

आता (१) मधील य व र मधील द्विघातीय पदें केवळ (काय + खार) आणि (का'य + खा'र) यांनाच एकत्र गुणून मिळतात.

समीकार (२) चा वामपक्ष समीकार (१) मधील द्विघातीय पदांनी निर्माण झालेला आहे. म्हणून

समीकार (२) ≡ (काय + खार) (का' य + खा' र) = ०

आता काय+खार+गा=० आणि का'य+खा'र+गा'=० यांना समांतर असलेल्या व मूलबिंदुंतून जाणाऱ्या रेषा अनुक्रमें काय + खार = ० आणि का'य + खा' र = ० या आहेत.

यावरून इष्ट प्रमेय सिद्ध होतें.

उपसाध्य :— कय^{२}+२ जयर+खर^{२}+२ छय+२ चर+ग=० ने निरूपिलेल्या दोन रेषांमधील कोण,

कय^{२} + २ जयर + खर^{२} = ० ने निरूपिलेल्या व मूलबिंदुंतून जाणाऱ्या दोन रेषांमधील कोणाएवढा असतो.

मूलबिंदुंतून जाणारें रेषायुग्म पहिल्या रेषायुग्माला समांतर आहे. म्हणून वरील उपसाध्य सहज सिद्ध होतें.

४१.१ म्हणून सामान्यतम द्विघातीय समीकाराने निरूपिलेल्या दोन सरळ रेषांमधील कोण काढण्याकरिता आपण त्यांतील केवळ य, र मधील द्विघातीय पदें विचारांत घेऊन त्यांनी निरूपिलेल्या व मूलबिंदुंतून जाणाऱ्या दोन रेषांमधील कोण काढला म्हणजे काम भागेल.

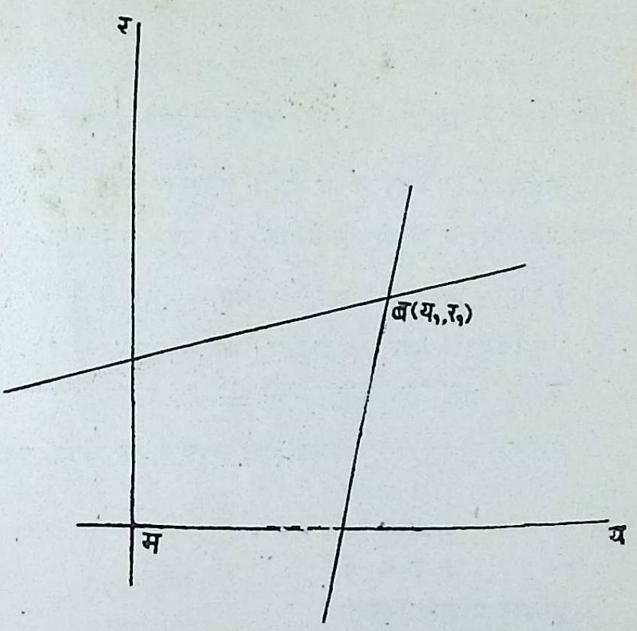
४२. अनुच्छेद ३७ मधे सामान्यतम द्विघातीय य समीकाराने दोन सरळ रेषांचें निरूपण करावें याविषयी प्रतिबंध काढला आहे. तोच प्रतिबंध पुढील-प्रमाणेहि काढतां येतो.

समजा की द्विघातीय समीकाराने दिलेल्या रेषा ($य_{१}$,$र_{१}$) या बिंदुंत छेदतात.

आता मूलबिंदूचें ($य_{१}$, $र_{१}$) बिंदूस स्थानांतर करून आणि नवीन अक्ष मूळच्या अक्षांना समांतर घेऊन,

कय^{२} + २जयर + खर^{२} + २छय + २चर + ग = ०

या समीकाराचें रूपांतर



आ. ३३

$$क(य+य_१)^२+२ज(य+य_१)(र+र_१)+ख(र+र_१)^२$$
$$+२छ(य+य_१)+२च(र+र_१)+ग=०$$

किंवा,
$$[कय^२+२जयर+खर^२+२(कय_१+जर_१+छ)य$$
$$+२(जय_१+खर_१+च)र+कय_१^२+२जय_१र_१+खर_१^२$$
$$+२छय_१+२चर_१+ग]=०$$

असें होतें.

आता हा समीकार मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या दोन सरळ रेषा निरूपित असला पाहिजे व म्हणून तो य, र मधे समानघाती असला पाहिजे. याकरिता य चा गुणक, र चा गुणक, आणि अचल पद प्रत्येकीं शून्यासमान असले पाहिजेत.

$\therefore$ क $य_१$ + ज $र_१$ + छ = ० (१)

ज $य_१$ + ख $र_१$ + च = ० (२)

आणि क$य_१^२$+२ज$य_१$$र_१$+ख$र_१^२$+२छ$य_१$+२च$र_१$+ग = ० (३)

समीकार (१) ला $य_१$ ने आणि समीकार (२) ला $र_१$ ने गुणून त्यांचा योग करा व तो योग समीकार (३) मधून उणें करा.

[क$य_१^२$+२ज$य_१$$र_१$+ख$र_१^२$+२छ$य_१$+२च$र_१$+ग

−$य_१$(क$य_१$ + ज$र_१$ + छ)−$र_१$(ज$य_१$ + ख$र_१$ + च)] = ०

अर्थात् छ$य_१$ + च $र_१$ + ग = ० (४)

समीकार (१), (२) आणि (४) मधून $य_१$, $र_१$ चें निरसन करून,

$$\begin{vmatrix} क & ज & छ \\ ज & ख & च \\ छ & च & ग \end{vmatrix} = ०$$

हा इष्ट प्रतिबंध मिळतो.

उपसाध्यः– द्विघातीय समीकाराने निरूपिलेल्या दोन रेषांचा छेदनबिंदु

$$\left.\begin{array}{l} क\ य_१ + ज\ र_१ + छ = ० \\ ज\ य_१ + ख\ र_१ + च = ० \end{array}\right\}$$

या समीकारांपासून मिळतो.

इष्ट बिंदूचे याम ($य_१$, $र_१$) असल्यास

$$य_१ = \frac{ज\ च - ख\ छ}{क\ ख - ज^२}\ ,\ र_१ = \frac{छ\ ज - क\ च}{क\ ख - ज^२}$$

क ख − $ज^२$ = ० असल्यास आणि अंश शून्यासमान नसल्यास छेदनबिंदु ($य_१$, र) अनंतावर असतो आणि दोन रेषा समांतर होतात.

उदा०१:– ६ $य^२$ + य र − $र^२$ − २१ य − ८ र + ९ = ० (१)

हा समीकार दोन रेषा निरूपितो हें सिद्ध करून त्यांचे समीकार व त्यांमधील कोण काढा.

समीकार (१) ने दोन रेषा निरूपाव्या याकरता

क ख ग + २ च छ ज − क $च^{२}$ − ख $छ^{२}$ − ग $ज^{२}$ = ० हा प्रतिबंध पाळला गेला पाहिजे,

येथे क = ६; ख = − १; ग = ९

$$ज = \frac{१}{२};\ च = -४;\ छ = -\frac{२१}{२}$$

प्रतिबंधांत या अर्हांचें आदेश करून,

$$क\,ख\,ग = ६ \times -१ \times ९ = -५४$$

$$+२च\,छ\,ज = २ \times (-४) \times \left(-\frac{२१}{२}\right) \times \frac{१}{२} = +४२$$

$$-क\,च^{२} = (-)\ ६ \times (-४) \times (-४) = -९६$$

$$-ख\,छ^{२} = (-).(-१) \times \left(-\frac{२१}{२}\right) \times \left(-\frac{२१}{२}\right) = \frac{४४१}{४}$$

$$-ग\,ज^{२} = (-)\ ९ \times \frac{१}{२} \times \frac{१}{२} = -\frac{९}{४}$$

योग करून = ०

यावरून इष्ट प्रतिबंध पाळला जातो हें दिसून येईल. म्हणून समीकार (१) दोन सरळ रेषा निरूपितो.

(१) ने दिलेल्या दोन रेषांमधील कोण आणि या रेषांना समांतर असलेल्या व मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या रेषायुग्मांतील कोण एकच आहे. हें रेषायुग्म

$$६\,य^{२} + यर + र^{२} = ० \qquad (२)$$

या समीकाराने मिळतें. या रेषांमधील कोण अ असल्यास,

$$\text{स्प अ} = \frac{२\sqrt{\text{ज}^{२} - \text{क ख}}}{\text{क} + \text{ख}}$$

$$= \frac{२\sqrt{\frac{१}{४} + ६}}{६ - १}$$

$$= \frac{२\sqrt{\frac{२५}{४}}}{५}$$

$$= \frac{२ \times ५}{५ \times २}$$

$$= १$$

$$\therefore \quad \text{अ} = \frac{\text{प्या}}{४}$$

म्हणून (१) ने दिलेल्या रेषांमधील कोणहि $\frac{\text{प्या}}{४}$ आहे.

आता (१) ने निरूपिलेल्या रेषा (२) ने निरूपिलेल्या रेषांना समांतर आहेत.

(२) ने निरूपिलेल्या रेषा

$$६\,\text{य}^{२} + \text{य}\,\text{र} - \text{र}^{२} = ०$$

$$\text{किंवा,}\ (३\text{य} - \text{र})\ (२\text{य} + \text{र}) = ०$$

किंवा, $३\,\text{य} - \text{र} = ०$ आणि $२\,\text{य} + \text{र} = ०$ या आहत. या दोन रेषांना समांतर असलेल्या रेषांचे समीकार

$$३\,\text{य} - \text{र} + \text{ग} = ०$$

$$\text{व} \quad २\,\text{य} + \text{र} + \text{ग}' = ०$$

या रूपांत असले पाहिजेत. या दोन रेषा जर समीकार (१) ने

निरूपिल्या असतील तर

$$६ य^२ + य र - र^२ - २१य - ८र + ९ \equiv (३य - र + ग)(२य + र + ग')$$

दोन्ही बाजूंच्या गुणकांची तुलना करून,

$$२ ग + ३ ग' = -२१ \qquad (१')$$

$$ग - ग' = -८ \qquad (२')$$

$$ग ग' = ९ \qquad (३')$$

वरील तीनपैकी कोणतेहि दोन समीकार सोडवून,

$$ग = -९$$

$$व \; ग' = -१$$

म्हणून समीकार (१) ने निरूपिलेल्या रेषा

$$३ य - र - ९ = ०$$

आणि $२ य + र - १ = ०$

या आहेत.

टीप :- (१') (२') व (३') हे तीन स्वतंत्र समीकार नाहीत. ग व ग' या दोन अज्ञात राशी निश्चित् करण्यासाठी दोनच समीकार पुरेसे आहेत. म्हणून कोणत्याहि दोन समीकारांवरून मिळालेल्या ग आणि ग' च्या अर्हा आपोआपच उरलेल्या समीकाराचें समाधान करतात.

उदा० २ :- जर $(कख' - क'ख)^२ = ४ (जक' - ज'क)(खज' - ख'ज)$ असेल तर

$$क य^२ + २ ज य र + ख र^२ = ० \qquad (१)$$

$$क' य^२ + २ ज' य र + ख' र^२ = ० \qquad (२)$$

यांनी दिलेल्या दोन सरळ रेषायुग्मांत एक सरळ रेषा साधारण असते हें सिद्ध करा.

समजा की साधारण सरळ रेषेचा समीकार,

$र - ध_१ य = ०$ हा आहे.

म्हणून (१) व (२) च्या वामपक्षांतील दोन्ही व्यंजकांत $(र-ध_१ य)$ हा अवयव असला पाहिजे.

अर्थात् $र = ध_१ य$, (१) व (२) या दोन्ही समीकारांचें समाधान करील.

म्हणून (१) व (२) मधे $र = ध_१ य$ हा आदेश करून,

$$ख ध_१^२ + २ ज ध_१ + क = ० \quad (३)$$

$$ख' ध_१^२ + २ ज' ध_१ + क' = ० \quad (४)$$

(३) व (४) वज्रगुणनाने सोडवून

$$\frac{ध_१^२}{२ (ज क' - ज' क)} = \frac{ध_१}{(क ख' - क' ख)} = \frac{१}{२ (ख ज' - ख' ज)}$$

$$\therefore \frac{ज क' - ज' क}{ख ज' - ख' ज} = ध_१^२ = \left\{ \frac{(क ख' - क' ख)}{२ (ख ज' - ख' ज)} \right\}^२$$

किंवा, $(क ख' - क' ख)^२ = ४ (ज क' - ज' क) (ख ज' - ख' ज)$ हा इष्ट प्रतिबंध होय.

उदा० ३ :- $ख य^२ - २ ज य र + क र^२ = ०$ (१)

याने निरूपिलेलें रेषायुग्म

$$क य^२ + २ ज य र + ख र^२ = ० \quad (२)$$

याने निरूपिलेल्या रेषायुग्मास लंब आहे हें दाखवा.

समजा की (२) ने निरूपिलेलें रेषायुग्म $र - ध_१ य = ०$ आणि $र - ध_२ य = ०$ हें आहे.

$$\therefore ख (र - ध_१ य)(र - ध_२ य) \equiv ख र^२ + २ ज य र + क य^२ = ०$$

यावरून $$ध_१ + ध_२ = - \frac{२ ज}{ख}$$

व $$ध_१ ध_२ = \frac{क}{ख}$$

आता मूलबिंदुंतून जाणाऱ्या आणि $र - ध_१ य = ०$ व $र - ध_२ य = ०$ यांना लंब असणाऱ्या रेषा अनुक्रमें

$$ध_१ र + य = ०$$

व $$ध_२ र + य = ०$$

या आहेत.

म्हणून (२) ने निरूपिलेल्या रेषायुग्माला लंब असलेलें रेषायुग्म

$$(ध_१ र + य)\ (ध_२ र + य) = ०$$

किंवा, $ध_१ ध_२ र^२ + (ध_१ + ध_२)\, य र + य^२ = ०$

किंवा, $$\frac{क}{ख} र^२ - \frac{२ ज}{ख} य र + य^२ = ०$$

किंवा, $$क र^२ - २ ज य र + ख य^२ = ०$$

किंवा, $$ख य^२ - २ ज य र + क र^२ = ०$$

हेंच समीकार (१) ने दिलेलें रेषायुग्म होय.

४३. $क य^२ + २ ज य र + ख र^२ = ०$ या सरळ रेषांमधील कोणांच्या द्विभाजकांचा समीकार काढणें.

समजा की वरील समीकाराने दिलेल्या दोन रेषा

$$\left.\begin{array}{l} र - ध_१ य = ० \\ \text{व}\quad र - ध_२ य = ० \end{array}\right\} \qquad (१)$$

या आहेत.

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\quad ध_१ + ध_२ = -\dfrac{२ ज}{ख} \\ \text{व}\quad ध_१ ध_२ = -\dfrac{क}{ख} \end{array}\right\} \qquad (२)$$

(१) ने दिलेल्या रेषांमधील कोणांच्या द्विभाजकांचे समीकार

$$\frac{र - ध_१ य}{\sqrt{१+ध_१^२}} = \pm \frac{र - ध_२ य}{\sqrt{१+ध_२^२}}$$

हे आहेत.

म्हणून द्विभाजकांचा एकत्रित समीकार

$$\left\{\frac{र-ध_१य}{\sqrt{१+ध_१^२}} - \frac{र-ध_२य}{\sqrt{१+ध_२^२}}\right\}\left\{\frac{र-ध_१य}{\sqrt{१+ध_१^२}} + \frac{र-ध_२य}{\sqrt{१+ध_२^२}}\right\} = ०$$

किंवा, $\frac{(र - ध_१ य)^२}{(१ + ध_१^२)} - \frac{(र - ध_२ य)^२}{(१ + ध_२^२)} = ०$

किंवा, $(१ + ध_२^२)(र^२ - २ ध_१ य र + ध_१^२ य^२)$

$- (१ + ध_१^२)(र^२ - २ ध_२ य र + ध_२^२ य^२) = ०$

किंवा, $(ध_१^२ - ध_२^२)(य^२ - र^२)$

$+ २ (ध_१ ध_२ - १)(ध_१ - ध_२) यर = ०$

यांस $(ध_१ - ध_२)$ ने भागून,

$$(ध_१ + ध_२)(य^२ - र^२) + २ (ध_१ ध_२ - १) यर = ०$$

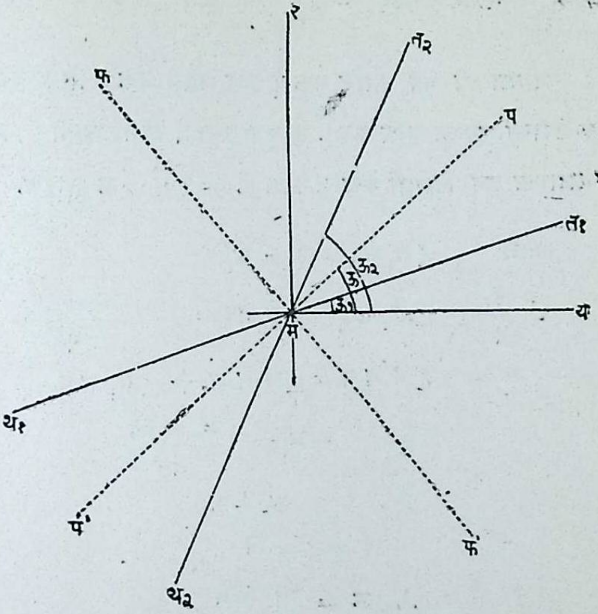
किंवा, $\frac{य^२ - र^२}{१ - ध_१ ध_२} = \frac{२ य र}{ध_१ + ध_२}$

किंवा, $\frac{य^२ - र^२}{१ - \frac{क}{ख}} = \frac{२ य र}{-\frac{२ज}{ख}}$

किंवा, $\frac{य^२ - र^२}{क - ख} = \frac{य र}{ज}$

४३·१ अन्यथा:– $थ_१ म त_१$ आणि $थ_२ म त_२$ या रेषा य अक्षाच्या धन दिशेशीं अनुक्रमें $ऊ_१$ व $ऊ_२$ हे कोण करतात. समजा कीं या दोन रेषांचा समीकार

$$क य^२ + २ ज य र + ख र^२ = ० \text{ हा आहे.} \qquad —(१)$$



आ. ३४

आता $थ_1$ म $त_1$ व $थ_2$ म $त_2$ या रेषांचे समीकार अनुक्रमें

$$र = स्प\, ऊ_1\, य$$

$$व \qquad र = स्प\, ऊ_2\, य$$

हे आहेत.

म्हणून समीकार (१)

$$ख\,(र - स्प\, ऊ_1\, य)\,(र - स्प\, ऊ_2\, य) = ०$$

यासमान असला पाहिजे.

$$\therefore \quad स्प\, ऊ_1 + स्प\, ऊ_2 = -\frac{२\, ज}{ख}$$

आणि $\quad स्प\, ऊ_{१}\, स्प\, ऊ_{२} = \frac{क}{ख}$

समजा की मप आणि मफ हे इष्ट द्विभाजक असून य-अक्षाच्या धन दिशेशीं मप ऊ कोण करते. म्हणून दुसऱ्या द्विभाजकाने (मफ ने) य-अक्षाच्या धन दिशेशीं केलेला कोण $ऊ' = ९०^\circ + ऊ$ होईल.

आता $\quad \angle त_{१}मत_{२} = ऊ_{२} - ऊ_{१}$

$$\therefore \frac{१}{२} \angle त_{१}मत_{२} = \angle त_{१}मप = \frac{ऊ_{२} - ऊ_{१}}{२}$$

$$\angle यमप = \angle यमत_{१} + \angle त_{१}मप$$

$$= ऊ_{१} + \frac{ऊ_{२} - ऊ_{१}}{२}$$

$$= \frac{ऊ_{१} + ऊ_{२}}{२}$$

$$\therefore ऊ = \frac{ऊ_{१} + ऊ_{२}}{२}$$

किंवा, $\quad २\, ऊ = ऊ_{१} + ऊ_{२}$

आणि $\quad \angle यमफ = ९०^\circ + ऊ$

$\therefore \quad ऊ' = ९०^\circ + ऊ$

$\therefore$ मप व मफ द्विभाजकांचा एकत्रित समीकार

$$(र - स्प\, ऊ\, य) (र - स्प\, ऊ'\, य) = ०$$

किंवा, $\{ र - स्प\, ऊ\, य \} \{ र - स्प\, (९०^\circ + ऊ) . य \} = ०$

किंवा, $(र - स्प\, ऊ\, य) (र + कोस्प\, ऊ . य) = ०$

किंवा, $र^{२} - य^{२} + (कोस्प\, ऊ - स्प\, ऊ)\, यर = ०$

किंवा, $\left(\frac{१ - स्प^{२}\, ऊ}{स्प\, ऊ} \right) य\, र = य^{२} - र^{२}$

किंवा $$\frac{य\ र}{य^{२} - र^{२}} = \frac{स्प\ ऊ}{१ - स्प^{२}\ ऊ}$$

$$= \frac{१}{२}\ स्प\ २\ ऊ$$

$$= \frac{१}{२}\ स्प\ (\ ऊ_{१} + ऊ_{२}\ )$$

$$= \frac{१}{२} \cdot \frac{स्प\ ऊ_{१} + स्प\ ऊ_{२}}{१ - स्प\ ऊ_{१}\ स्प\ ऊ_{२}}$$

$$= \frac{१}{२} \cdot \frac{-\frac{२\ ज}{ख}}{१ - \frac{क}{ख}}$$

$$= \frac{ज}{क - ख}$$

म्हणून $$\frac{य^{२} - र^{२}}{क - ख} = \frac{य\ र}{ज}$$

हा द्विभाजकांचा इष्ट समीकार होय.

४४. $तय + थर = द$ ही सरळ रेषा

$$क\ य^{२} + २\ ज\ य\ र + ख\ र^{२} + २\ छ\ य\ + २\ च\ र + ग = ० \qquad (१)$$

या पथास ज्या बिंदूंत मिळते ते बिंदू मूलबिंदूला जोडून येणाऱ्या सरळ रेषांचा समीकार काढणें.

दिलेल्या सरळ रेषेचा समीकार

$$\frac{तय + थर}{द} = १ \qquad (२)$$

असाहि लिहितां येतो.

आता $तय + थर = द$ ही रेषा पथ (१) ला ज्या बिंदूंत मिळते

त्या बिंदूंचे याम समीकार (१) व (२) यांचें पृथक् समाधान करतात; आणि म्हणून ते याम

$$क य^{2} + २ ज य र + ख र^{2} + २ छ य \left(\frac{त य + थ र}{द} \right)$$

$$+ २ च र \left(\frac{त य + थ र}{द} \right) + ग \left(\frac{त य + थ र}{द} \right)^{2} = ० \quad (३)$$

या समीकाराचेंहि समाधान करतात.

म्हणून समीकार (३), (१) व (२) चे छेदनबिंदू ज्या पथावर असतात त्या पथाचें निरूपण करतो.

परंतु, समीकार (३) चें प्रऱ्हसन (reduction) केल्यानंतर तो य व र मधे द्विघातीय समानघाती समीकार होतो, म्हणून हा समीकार मूलबिंदूंतून आणि (१) व (२) यांचे छेदनबिंदू यांतून जाणाऱ्या दोन सरळ रेषा निरूपितो.

यावरून $त य + थ र = द$ ही रेषा $क य^{2} + २ ज य र + ख र^{2} + २ छ य + २ च र + ग = ०$ या पथास ज्या बिंदूंत मिळते ते बिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषायुग्माचा (३) हा समीकार आहे हें दिसून येईल.

उदा० :- $य + र = १$ ही रेषा

$४ य^{2} + ४ र^{2} + ४ य - २ र - ५ = ०$ या वक्रास ज्या बिंदूंत मिळते ते बिंदू मूलबिंदूंना जोडून येणाऱ्या रेषांचा समीकार काढा व त्या रेषा एकमेकांस लंब आहेत हें सिद्ध करा.

$$४ य^{2} + ४ र^{2} + ४ य - २ र - ५ = ० \quad (१)$$

हा समीकार

$$य + र = १ \quad (२)$$

या समीकाराच्या साह्याने समानघातीय केल्यावर तो इष्ट दोन रेषांचें निरूपण करील.

म्हणून, $४ य^{2} + ४ र^{2} + (४ य - २ र)(य + र) - ५ (य + र)^{2} = ० \quad (३)$

हा समीकार इष्ट रेषायुग्म निरूपितो.

(३) चें प्रऱ्हसन करून,

$$३य^{२} - ८यर - ३र^{२} = ० \qquad (४)$$

हा इष्ट रेषायुग्माचा समीकार होय.

लंवतेचा प्रतिवंध

$$क + ख = ०$$

अर्थात् $३ - ३ = ०$

पाळला जातो. म्हणून या रेषा एकमेकांस लंब आहेत हें सहज दिसून येईल.

उदाहरणसंग्रह ५

(१) $२य + ३र - ४ = ०$ या रेषेशीं ४५° चा कोण करणाऱ्या व (१०, २) बिंदूंतून जाणाऱ्या दोन रेषांचे समीकार एकाच समीकाराने व्यक्त करा. (दिल्ली १९३४)

(२) खालील समीकार दोन सरळ रेषा निरूपितात हें सिद्ध करा आणि त्यांचा छेदनबिंदु व त्यांमधील कोण काढा.

(१) $३र^{२} - ८यर - ३य^{२} - २९य + ३र - १८ = ०$ (नागपूर १९४६)

(२) $२य^{२} - ३यर + र^{२} + य - १ = ०$ (नागपूर १९२५)

(३) $य^{२} - र^{२} - ३य + र + २ = ०$ (मुंईब १९३६)

(४) $१२य^{२} + ७यर - १०र^{२} + १३य + ४५र - ३५ = ०$ (कलकत्ता १९२५)

(५) $य^{२} - २यर \text{ कोस्प ऊ} - र^{२} = ०$

(३) $\text{कय}^{२}+\text{२जयर}+\text{खर}^{२}+\text{२छय}+\text{२चर}+\text{ग}=०$ हा सामान्य द्विघातीय समीकार, $\text{ज}^{२}=\text{कख}$ व $\text{खछ}^{२}=\text{कच}^{२}$ असल्यास, दोन समांतर रेषा निरूपितो हें सिद्ध करा. आणि अशा वेळीं त्या दोन रेषांमधील अंतर $२\dfrac{\sqrt{\text{छ}^{२}-\text{कग}}}{\sqrt{\text{क}(\text{क}+\text{ख})}}$ असते हें सिद्ध करा. (आंध्र १९४२)

(४) खालील समीकार समांतर रेषा निरूपितात हें सिद्ध करा आणि या प्रत्येक रेषायुग्मामधील अंतर काढा.

(१) $४९\text{य}^{२}-४२\text{यर}+९\text{र}^{२}+२८\text{य}-१२\text{र}-१=०$

(मद्रास १९४०)

[illegible]$^{२}+२\text{यर}+\text{र}^{२}=८\text{कय}+८\text{कर}+९\text{क}^{२}$

(नागपूर १९३२)

(३) $४\text{य}^{२}+१२\text{यर}+९\text{र}^{२}-६\text{य}-९\text{र}+१=०$

(अन्नमलाई १९३८)

(४) $९\text{य}^{२}-६\text{यर}+\text{र}^{२}+१८\text{य}-६\text{र}+८=०$

(म्हैसूर १९३९)

(५) पुढील समीकार 'ज' च्या कोणत्याहि अर्हेकरिता दोन सरळ रेषा निरूपितात ?

(१) $\text{य}^{२}-२\text{ज'यर}+\text{र}^{२}-५\text{य}-७\text{र}+६=०$

(नागपूर १९३९)

(२) $२\text{य}^{२}+६\text{यर}+\text{र}^{२}+४\text{य}+२\text{र}+\text{ज'}=०$

(नागपूर १९३५)

(३) $\text{ज'यर}+५\text{य}+३\text{र}+२=०$

(४) $४\text{य}^{२}-९\text{र}^{२}-२(८+\text{ज'})\text{य}-१८\text{र}=२९+२\text{ज'}$

(५) $२\text{य}^{२}+\text{यर}-\text{र}^{२}+\text{ज'य}+६\text{र}-९=०$

(६) $क^२(य^२+र^२)-(तर-थय)^२=०$ या समीकाराने निरूपिलेल्या रेषांपासून (त,थ) हा बिंदु समदूर आहे हें सिद्ध करा.

(नागपूर १९२६)

(७) $(क-ख)(य^२-र^२)+४\,जयर=०$ आणि

$\frac{य^२-र^२}{क-ख}=\frac{यर}{ज}$ हीं रेषायुग्में अशीं आहेत की प्रत्येक रेषायुग्म दुसऱ्या युग्मांतील कोण दुभागतें हें सिद्ध करा.

(नागपूर १९२७)

(८) $क^२य^२+२ज(क+ख)यर+ख^२र^२=०$ हें रेषायुग्म $कय^२+२जयर+खर^२=०$ या रेषायुग्माशीं एकच कोण करतें हें सिद्ध करा

(९) $कय^२+२जयर+खर^२+ऋ(य^२+र^२)=०$ हें रेषायुग्म $कय^२+२जयर+खर^२=०$ या रेषांयुग्माशीं एकच कोण करतें हें सिद्ध करा.

(१०) $य^२-२तयर-र^२=०$ व $य^२-२थयर-र^२=०$ हीं रेषायुग्में अशीं आहेत की प्रत्येक रेषायुग्म दुसऱ्या युग्मांतील कोण दुभागतें. तर $तथ=-१$ हें सिद्ध करा.

(११) $र=धय+ग$ ही रेषा आणि $य^२+र^२=क^२$ हा वक्र यांचे छेदन-बिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषायुग्माचा समीकार काढा; व या रेषा एकमेकांस लंब होण्याकरिता $२ग^२=क^२(१+ध^२)$ हें सिद्ध करा.

(१२) $थय+तर=२तथ$ ही रेषा आणि $(य-त)^२+(र-थ)^२=ग^२$ हा वक्र यांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषा एकमेकांस लंब होण्याकरिता $त^२+थ^२=ग^२$ हें सिद्ध करा.

(१३) $तय+थर=द$ ही रेषा आणि

$कय^२+२जयर+खर^२+२छय$

$+$ २चर $+$ ग $=$ ० हा वक्र यांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषांचा समीकार काढा आणि त्या रेषांच्या लंबतेचा प्रतिबंध काढा.

(१४) खालील वक्रांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषायुग्मांचे समीकार व त्यांच्यामधील कोण काढा.

(१) $य + र = ४$ आणि $य^२ - ४य + र^२ = ०$ (नागपूर १९२६)

(२) $र = ३य + २$ आणि $य^२ + २यर + ३र^२ + ४य + ८र - ११ = ०$

(३) $य + र = १$ आणि $४य^२ + ४र^२ + ४य - २र - ५ = ०$

(४) $२य - ३र + ४ = ०$ आणि
$य^२ + ४यर + २र^२ + १२य + ४र = ०$

(५) $य - ३र + २ = ०$ आणि
$र^२ - १७यर + १६र - १२ = ०$

(६) $३य - २र = १$ आणि
$३य^२ + ५यर - ३र^२ + २य + ३र = ०$

उदाहरणसंग्रह ६

सरळ रेषा. संकीर्ण प्रश्न.

(१) पुढे उल्लेखिलेल्या बिंदूंचे याम काढा :–

(१) (६, १), (– ८ ३) व (– ३, – २) हे शिरोबिंदू असणाऱ्या त्रिकोणाचें लंबकेंद्र (नागपूर १९३९)

(२) (१४, १), (२, – ४) व (२, १०) हे शिरो-

बिंदू असणाऱ्या त्रिकोणाचें अंतःकेंद्र. (नागपूर १९३१)

(२) एका त्रिकोणाच्या बाजूंचे समीकार
७य+र—१०=०, य—२र+५=० व य+र+२=०
हे आहेत. तर त्याच्या लंबकेंद्राचे याम काढा. (आंध्र १९४१)

(३) एका त्रिकोणाचे दोन शिरोबिंदु (३, -१) व (-२, ३) हे असून त्याचे लंबकेंद्र मूलबिंदू आहे. तर उरलेल्या शिरोबिंदूचे याम काढा. (नागपूर १९३२)

(४) य=३; र=४; व ४य+३र=१२ या रेषांमुळे तयार झालेल्या त्रिकोणाच्या अंतःकेन्द्राचे याम काढा. (नागपूर १९४४)

(५) (०, ०), (०, ८), (४, ६) या तीन बिंदूंनी बनलेल्या त्रिकोणाचें प्रकेंद्र प्र, परिकेंद्र प व लंबकेंद्र ल यांचे याम काढा. प्र व प यांना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा व ती ल मधून जाते याचें सत्यापन करा. (आंध्र १९३३)

(६) एका त्रिकोणाच्या बाजूंचे समीकार
२य=र+२; य=७र—१२; व ५य+४र=५७ हे आहेत.
तर त्यांचे शिरोबिंदू काढा. त्रिकोणाच्या मध्यकांचे समीकार काढा व त्या $\left(\frac{१६}{३}, \frac{१३}{३}\right)$ या बिंदूंशीं संगामी आहेत हें दाखवा. (त्रावणकोर १९४०)

(७) य—२र+१=०; २य+र—३=०; व ३य—र—७=० या रेषांमुळे एक समद्विभुजत्रिकोण बनतो हें सिद्ध करा. शिरोबिंदूपासून त्याच्या पायावर काढलेल्या लंबाचा समीकार काढा. (आंध्र १९४२)

(८) (०, २), (१, ०) व (३, १) हे बिंदू एका लंबकोण समद्विभुज त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत हें दाखवा. (मैसूर १९३५)

(९) एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू (२, १), (३, – २) व (– ४, – १) हे आहेत. तर शिरोबिंदूपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांच्या लांबी काढा. (दिल्ली १९३५)

(१०) (– २, – १), (१. ०), (४, ३) व (१, २) हे एका समांतर चतुर्भुजाचे (parallelogram) शिरोबिंदू आहेत हें सिद्ध करा. (मैसूर १९३९)

(११) $र = धय + क$; $र = धय + ख$; $र = ध'य + ग$ आणि $र = ध'य + घ$ या रेषांनी मर्यादित केलेल्या समांतर चतुर्भुजाचें क्षेत्रफळ $\dfrac{(क - ख)(ग - घ)}{(ध - ध')}$ आहे हें सिद्ध करा.

(बनारस १९४१)

(१२) य कोज्या ऊ + र ज्या ऊ = क कोज्या २ ऊ आणि य ज्या ऊ + र कोज्या ऊ = $\dfrac{क}{२}$ ज्या २ ऊ या रेषांवर मूलबिंदूपासून काढलेल्या लंबांच्या लांबी अनुक्रमें ल व ल' असल्यास $ल^२ + ४ल'^२ = क^२$, हें सिद्ध करा.

(१३) पुढील सरळ रेषा एकाच बिंदूतून जातात हें सिद्ध करा :–

$$(ख + ग)य + कर = घ$$
$$(ग + क)य + खर = घ$$
$$(क + ख)य + गर = घ.$$

(१४) $४य^२ – र^२ = ०$ व $य = क$ यांनी बनलेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढा. (नागपूर १९२८)

(१५) $कय^२ + २ जयर + खर^२ = ०$ या रेषांनी $तय + थर = १$ या रेषेबरोबर केलेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $\dfrac{\sqrt{ज^२ - कख}}{कथ^२ + खत^२ - २ जतथ}$ आहे हें सिद्ध करा. (आंध्र १९३५)

(१६) ६ $य^२$–५ यर + $र^२$ = ० व य + र = ३ क या रेषांनी तयार झालेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $\frac{३ क^२}{८}$ आहे हें दाखवा. (नागपूर १९३१)

(१७) ३ $य^२$ – ८ यर – ३ $र^२$ = ० व य + २र = ३ या रेषा एका लंबकोण समद्विभुज त्रिकोणाच्या भुजा निरूपितात हें सिद्ध करा.

(मुंबई १९२८)

(१८) $य^२$ – ४ य र + $र^२$ = ० व य + र = १ या रेषा एका समभुज त्रिकोणाच्या भुजा आहेत हें सिद्ध करा आणि त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढा. (बनारस १९४१)

(१९) ($क^२$ – ३ $ख^२$)$य^२$ + ८ कखयर + ($ख^२$ – ३ $क^२$)$र^२$ = ० या रेषा कय + खर + ग = ० या रेषेबरोबर एक समभुज त्रिकोण करतात हें सिद्ध करा व त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $\frac{ग^२}{\sqrt{३}\ (क^२ + ख^२)}$ आहे हें दाखवा.

(२०) य–र = २ ही रेषा व ५ $य^२$ + १२ यर – ८ $र^२$ + ८ य – ४ र + १२ = ० हा वक्र यांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषा यामाक्षांशीं समान कोण करतात हें सिद्ध करा.

(२१) $\frac{य}{क} + \frac{र}{ख}$ = १ ही रेषा व ५ ($य^२$ + $र^२$ + खय + कर) = ९ कख हा वक्र यांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या दोन सरळ रेषांचा समीकार काढा आणि या दोन रेषा लंब असल्यास
२ ($क^२$ + $ख^२$) = ५कख हें सिद्ध करा. (आंध्र १९४२)

(२२) ६ $य^२$ + ५ यर – ६ $र^२$ – ६ य – ४८ र – ७२ = ० हा समीकार दोन सरळ रेषा निरूपितो हें सिद्ध करा. या रेषा काढा आणि यांना

लंब असलेल्या व मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या रेषायुग्माचा समीकार काढा. (नागपूर १९३८)

(२३) $य^२+र^२+६ यर+४ य+४ र+२=०$ या पद्याने $तय+थर=१$ या रेषेवर खंडित केलेलें अंतर मूलबिंदूशीं 'अ' कोण आपातित करीत असल्यास

$$(त^२+थ^२+२ त+२ थ+१) स्प अ = \pm \sqrt{२} (त+थ+२)$$

हें सिद्ध करा. (नागपूर १९४२)

(२४) 'ध' च्या सर्व अर्हांकरिता

$$(क+२जध+खध^२) य^२+२ [(ख-क) ध-(ध^२-१) ज] यर + (कध^२ - २ जध+ख) र^२=०$$

या रेषांमधील कोण एकच असतो हें सिद्ध करा.

(बनारस १९२९)

(२५) मूलबिंदूंतून जाणाऱ्या दोन रेषांपैकी प्रत्येकीपासून (य', र') बिंदूचें अंतर घ आहे. तर त्या दोन रेषांचा समीकार

$$(य'र - यर')^२ = घ^२(य^२+र^२)$$

आहे हें सिद्ध करा. (नागपूर १९३०)

(२६) $कय^२+२ जयर - कर^२=०$ हे कोणद्विभाजक असणाऱ्या कोण-त्याहि रेषायुग्माचा समीकार

$$(का - ज) य^२+२ कयर+(का+ज) र^२=०$$

आहे हें सिद्ध करा.

(२७) एका रेषेने यामाक्षांवर खंडित केलेल्या अंतःखंडांचे व्युत्क्रम एक प्रथमघातीय समीकार निर्माण करतात. तर ती रेषा एका स्थिर बिंदूंतून जाते हें दाखवा.

(२८) $तय+थर+द=०$ ही रेषा व $र=य^२$ हा वक्र यांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषांचा समीकार लिहा आणि या दोन

रेषा एकमेकांस लंब असल्यास तय+थर+द=० ही रेषा एका स्थिर बिंदूंन जाते हें सिद्ध करा.

(२९) $३ य^२ - र^२ - २ य + ४ र = ०$ या वक्राच्या ज्या जीवा मूलबिंदूशीं लंबकोण आपातित करतात त्या सर्व एका स्थिर बिंदूतून जातात हें दाखवा.

(३०) $कय^२ + २ जयर + खर^२ = ०$ या रेषांवर ($य_१$, $र_१$) बिंदूपासून काढलेल्या लंबांचा गुणाकार $\frac{कय_१^२ + २ जय_१र_१ + खर_१^२}{\sqrt{(क - ख)^२ + ४ ज^२}}$ आहे हें सिद्ध करा.

(३१) एका बिंदूपासून य कोज्या ऊ+र ज्या ऊ=क,
व य कोज्या ए+र ज्या ए=क
या रेषांवर काढलेल्या लंबांचा गुणाकार त्याच बिंदूपासून

$$य\ कोज्या\ \frac{ऊ+ए}{२} + र\ ज्या\ \frac{ऊ+ए}{२} = क\ कोज्या\ \frac{ऊ-ए}{२}$$

या रेषेवर काढलेल्या लंबाच्या वर्गासमान आहे. तर बिंदूचा पथ $य^२ + र^२ = क^२$ आहे हें दाखवा.

(३२) $कय^२ + २ जयर + खर^२ = ०$ या रेषांवर ($य_१$, $र_१$) बिंदूपासून काढलेले लंब $ल_१$ व $ल_२$ असल्यास सिद्ध करा कीं

$$(ल_१^२ + ल_२^२)\ [(क - ख)^२ + ४ज^२]$$
$$= [\ २\ (क - ख)\ (कय_१^२ + खर_१^२) + ४\ ज\ (क + ख)\ य_१\ र_१ + ४\ ज^२\ (\ य_१^२ + र_१^२\ )\ ]$$

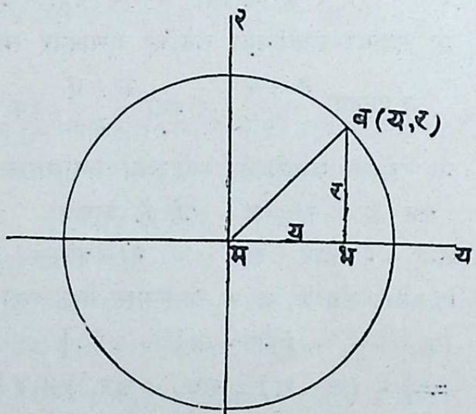
प्रकरण ५ वें

वृत्त

४५ परिभाषा.

एका स्थिर बिंदूपासून नेहमी अचल अंतर ठेवून फिरणाऱ्या बिंदूच्या पथास वृत्त (circle) म्हणतात. त्या स्थिर बिंदूस वृत्त-केंद्र (centre) व अचल अंतरास वृत्ताची त्रिज्या (radius) म्हणतात.

४५.१ केंद्र मूलबिंदूच्या ठिकाणीं, आणि त्रिज्या क असलेल्या वृत्ताचा समीकार काढणें.



आ. ३५

मूलबिंदु म हें केंद्र व मब (=क) ही त्रिज्या असलेल्या वृत्तावर ब (य, र) हा कोणताहि एक बिंदु आहे. बभ कोटि काढा.

आता बभम या लंबकोण त्रिकोणांत,

$$मभ^2 + भब^2 = मब^2$$

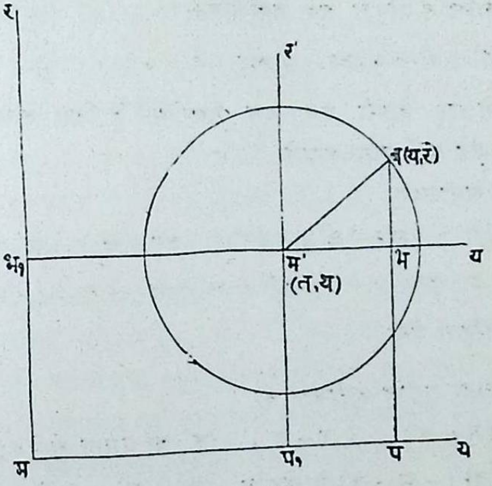
अर्थात् $य^2 + र^2 = क^2$

परिघावर ब बिंदु कुठेहि असला तरी हा संबंध सत्य असतो.

म्हणून वृत्ताचा इष्ट समीकार

$$य^2 + र^2 = क^2.$$

४५.२ (त, थ) बिंदु केंद्र आणि क ही त्रिज्या असलेल्या वृत्ताचा समीकार काढणें



आ. ३६

म' हें वृत्ताचें केंद्र असून त्याचे याम (त, थ) आहेत. ब (य, र) हा दिलेल्या वृत्ताच्या परिघावर असणारा कोणताहि एक बिंदु आहे.

मय व मर ला अनुक्रमें म'य' व म'र' समांतर काढा. बप ही कोटि म'य' ला भ बिंदूंत छेदूं द्या.

म'भब या लंबकोण त्रिकोणांत,

$$म'भ^2 + भब^2 = म'ब^2$$

पण, $म'भ = प_1प = मप - मप_1 = य - त,$

$$भब = पब - पभ = पब - प, म' = र - थ,$$

आणि $म'ब = क.$

$$\therefore \quad (य - त)^2 + (र - थ)^2 = क^2$$

वृत्तावर असणाऱ्या ब या कोणत्याहि बिंदूकरिता हा संबंध सत्य असतो.

म्हणून हा वृत्ताचा इष्ट समीकार आहे.

४६. छ, च आणि ग यांच्या सर्व अर्हांकरिता

$$य^2 + र^2 + २\ छय + २\ चर + ग = ०$$

हा समीकार नेहमी एक वृत्त निरूपितो हें सिद्ध करणें आणि त्या वृत्ताचें केंद्र व त्रिज्या काढणें.

दिलेला समीकार

$$(य^2 + २छय + छ^2) + (र^2 + २चर + च^2) = छ^2 + च^2 - ग$$

किंवा, $(य + छ)^2 + (र + च)^2 = छ^2 + च^2 - ग = (\sqrt{छ^2 + च^2 - ग})^2$

असा लिहितां येतो.

आता वरील समीकाराची

$(य - त)^2 + (र - थ)^2 = क^2$ या प्रमाप समीकाराशीं तुलना केल्यास तो $(- छ, - च)$ हे केंद्र व $\sqrt{छ^2 + च^2 - ग}$ ही त्रिज्या असलेलें वृत्त निरूपितो हें दिसून येईल.

$छ^2 + च^2 > ग$ असल्यास करणीगत राशि धन असते व म्हणून वृत्ताची त्रिज्या वास्तविक असते.

$छ^2 + च^2 = ग$ असल्यास वृत्ताची त्रिज्या शून्यासमान असते आणि म्हणून वृत्तावें $(-छ, -च)$ बिंदूंत प्रऱ्हसन होतें. शून्य त्रिज्या असणाऱ्या वृत्ताला बिंदुवृत्त म्हणतात.

$छ^2 + च^2 < ग$ असल्यास करणीगत राशी ऋण असते, म्हणून वृत्ताची त्रिज्या काल्पनिक असते या प्रकारांत दिलेला समीकार कोणताच

वास्तविक रैखिकीय पथ निरूपित नाही. अशावेळीं वरील समीकाराने निरूपित झालेल्या वृत्ताचें केन्द्र वास्तविक पण त्रिज्या काल्पनिक आहे असें समजतात.

४६.१ $क य^2 + क र^2 + २ छ' य + २ च' र + ग' = ०$ (१)

या समीकाराला क ने साद्यंत भागून त्याचें

$$य^2 + र^2 + २ छ य + २ च र + ग = ० \qquad (२)$$

या रूपांत केव्हाहि रूपांतर करतां येतें.

म्हणून समीकार (१) ला सुद्धा वृत्ताचा सामान्यतम समीकार मानण्यास हरकत नाही.

म्हणून, एखाद्या य आणि र मधील सामान्य द्विघातीय समीकारांत $य^2$ चा गुणक $र^2$ च्या गुणकासमान असून यर चा गुणक शून्य असेल तर तो समीकार नेहमी एक वृत्त निरूपितो.

४७. एखादें विवक्षित वृत्त निश्चित करण्याकरिता त्याच्या सामान्य समीकारांतील अर्थात् $य^2 + र^2 + २ छ य + २ च र + ग = ०$ यांतील छ, च व ग या तीन राशी माहीत असणें आवश्यक असते. या तीन राशींनी युक्त असलेले कोणतेहि तीन समीकार दिले असल्यास त्यांच्या अर्हा निश्चित करतां येतात आणि त्यांवरून विवक्षित वृत्त निश्चित करतां येतें. हे तीन समीकार म्हणजे वृत्ताने पाळलेले तीन प्रतिबंध होत. तीन (पण तीन पेक्षा अधिक नव्हे) रैखिकीय प्रतिबंध पाळणारे वृत्त काढतां येतें हें रैखिकीय सत्य वरील विधानाशीं बरोबर जुळतें. म्हणून वृत्तावरील तीन बिंदू किंवा त्याला स्पर्श करणाऱ्या तीन सरळ रेषा दिल्या असल्यास तें वृत्त निश्चित करतां येतें.

उदा०:- (१) $२य - र = ५$ या रेषेवर केंद्र असलेल्या आणि $(४, -१०)$ व $(-८, ८)$ या बिंदूंतून जाणाऱ्या वृत्ताचा समीकार काढा.

$$य^2 + र^2 + २ छ य + २ च र + ग = ०$$

हा इष्ट वृत्ताचा समीकार आहे असें समजा.

आता हें वृत्त (४, - १०) व (-८, ८) मधून जातें.

$\therefore$ १६+१००+२ छ . ४+२ च . (- १०) + ग=०

किंवा ८ छ -२० च+११६+ग=० (१)

आणि ६४+६४+२ छ (- ८)+२ च . ८+ग=०

किंवा १६ छ - १६ च - १२८-ग=० (२)

शिवाय, (- छ, - च) हें वृत्ताचें केंद्र असून तें २ य—र=५ या रेषेवर आहे.

$\therefore$ -२ छ+च=५

किंवा, २ छ-च+५=० (३)

आता, आपण (१), (२) व (३) हे समीकार छ, च व ग करिता सोडवून त्याच्या अर्हा काढूं.

(१) व (२) चा योग करून

२४छ-३६च-१२=०

किंवा, २ छ-३ च-१=० (४)

(३) मधून (४) चा वियोग करून

२ च+६=०

किंवा, च=-३.

च च्या अर्हेचा (३) मधे आदेश करून

२छ+३+५=०

किंवा, छ=-४.

च व छ यांच्या अर्हांचे (१) मधे आदेश करून,

-३२+६०+११६+ग=०

किंवा, ग=-१४४.

म्हणून, इष्ट वृत्ताचा समीकार

$$य^2+र^2-८य-६र-१४४=०$$

उदा० (२):- $२य-र-४=०$ या रेषेला स्पर्श करणाऱ्या व (१,-३) हा बिंदु केंद्र असलेल्या वृत्ताचा समीकार काढा.

वृत्ताच्या केंद्रापासून त्याच्या स्पर्शरेषेवर (tangent) काढलेला लंब वृत्ताच्या त्रिज्येसमान असतो या गुणधर्माचा (property) उपयोग करून आपण हें उदाहरण सोडवूं.

आता, $२य-र-४=०$ या रेषेवर (१,–३) पासून काढलेल्या लंबाची लांबी $\frac{२+३-४}{\sqrt{४+१}}$ किंवा $\frac{१}{\sqrt{५}}$ आहे.

दिलेली रेषा वृत्ताची स्पर्शरेषा होण्याकरिता हा लंब वृत्ताच्या त्रिज्येसमान असला पाहिजे. म्हणून (१,-३) हें केंद्र व $\frac{१}{\sqrt{५}}$ त्रिज्या असणाऱ्या वृत्ताचा समीकार

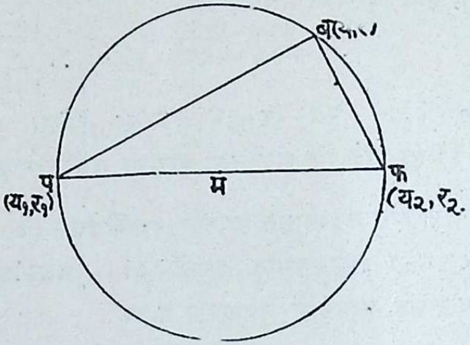
$$(य-१)^2+(र+३)^2=\frac{१}{५}$$

किंवा, $$य^2-२य+१+र^2+६र+९=\frac{१}{५}$$

किंवा, $$५(य^2+र^2)-१०य+३०र+४९=०$$

४७·१ $(य_1,र_1)$ व $(य_2,र_2)$ यांना जोडणारी रेषा व्यास घेऊन काढलेल्या वृत्ताचा समीकार.

समजा प $(य_1,र_1)$ व फ $(य_2,र_2)$ हे दिलेले दोन बिंदू आहेत. पफ जोडा व पफ व्यासावर एक वृत्त काढा. समजा या वृत्तावरील ब या कोणत्याहि बिंदूचे याम (य, र) आहेत.



आ. ३७

$$\text{आता, पब रेषेचा 'ध'} = \frac{र — र_1}{य — य_1}$$

$$\text{आणि बफ रेषेचा 'ध'} = \frac{र — र_2}{य — य_2}$$

पण, रैखिकीवरून, अर्धवृत्तांतील कोण लंबकोण असतो.

$$\therefore \text{ पब} \perp \text{बफ}$$

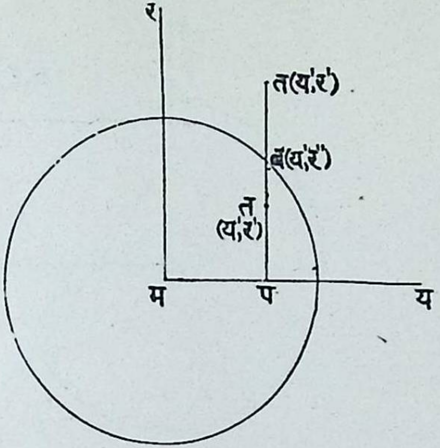
$$\therefore \left(\frac{र — र_1}{य — य_1}\right)\left(\frac{र — र_2}{य — य_2}\right) = — १$$

किंवा, $(र-र_1)(र-र_2)+(य-य_1)(य-य_2)=०$

वृत्तावरील ब या कोणत्याहि बिंदूकरिता हें सत्य आहे. म्हणून हा वृत्ताचा इष्ट समीकार आहे.

४८. $य'^2+र'^2-क^2$ ही राशि ऋण, शून्य किंवा धन असेल तदनुसार $(य',र')$ हा बिंदु $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताच्या आंत, वर किंवा बाहेर असतो.

समजा त(य,'र') हा दिलेला बिंदु आहे. तप ही कोटि $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताला ब(य,'र'') या बिंदूंत छेदते.



आ. ३८

आता ब(य,'र'') हा बिंदु वृत्तावर असल्यामुळे

$$य'^2 + र''^2 = क^2$$

किंवा, $र''^2 = क^2 - य'^2$

आकृतीवरून, $तप \underset{>}{\leq} बप$ असेल

तदनुसार, त बिंदु वृत्तांत, वृत्तावर किंवा वृत्ताच्या बाहेर राहील.

पण $तप = र'$ आणि $बप = र''$

म्हणून $र' \underset{>}{\leq} र''$ असेल

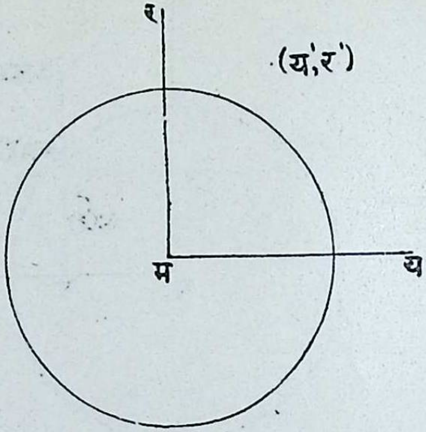
किंवा, $र'^2 \underset{>}{\leq} र''^2$;

,, $र'^2 \underset{>}{\leq} क^2 - य'^2$, ($\because र''^2 = क^2 - य'^2$)

,, $य'^2 + र'^2 - क^2 \underset{<}{\geq} 0$ असेल

तदनुसार त बिंदु वृत्ताच्या आंत, वर किंवा बाहेर राहील.

अन्यथा :— (य,'र') बिंदूचें मूलबिंदूपासूनचें (म्हणजेच वृत्ताच्या केंद्रापासूनचें) अंतर त्रा असल्यास,



आ. ३९

$$त्रा^{2} = य'^{2} + र'^{2}$$

आता,

(१) जेव्हा त्रा > क अर्थात् > वृत्तत्रिज्या, तेव्हा (य', र') बिंदु वृत्ताच्या बाहेर असतो हें उघड आहे.

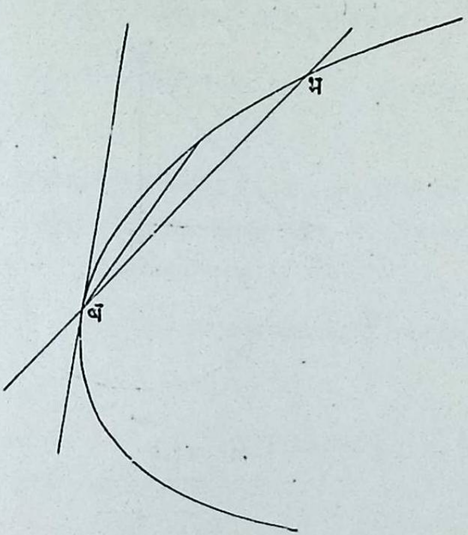
(२) जेव्हा त्रा> क अर्थात् < वृत्तत्रिज्या, तेव्हा (य',र') बिंदु वृत्ताच्या आंत असतो.

(३) जेव्हा त्रा = क अर्थात् = वृत्तत्रिज्या, तेव्हा (य',र') बिंदु वृत्तावर असतो.

म्हणून $य'^{2} + र'^{2} \gtreqless क^{2}$ असेल तदनुसार (य',र') बिंदु वृत्ताच्या बाहेर, वर किंवा आंत असतो.

४९. स्पर्शरेषा.

परिभाषा :– एका वक्रावर ब व भ हे दोन बिंदू असून ते बभ रेषेने जोडलेले आहेत. भ बिंदु वक्रावर सरकवून ब विंदूच्या अनियतपणे जवळ येऊं द्या. अंतिम स्थितींत, जेव्हा भब शीं संपाती होतो तेव्हा बभ



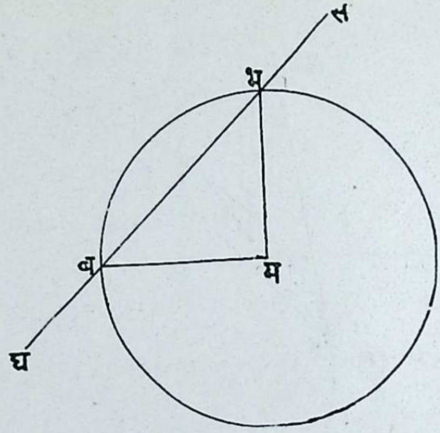
आ. ४०

रेषेला वक्राची ब शीं असणारी स्पर्शरेषा म्हणतात. यावरून, एखाद्या वक्रास दोन संपाती बिंदूंत मिळणारी रेषा म्हणजेच त्याची स्पर्शरेषा होय हें दिसून येईल. स्पर्शरेषा वक्रास ज्या बिंदूंत मिळते त्या बिंदूला तिचा स्पर्शबिंदु म्हणतात.

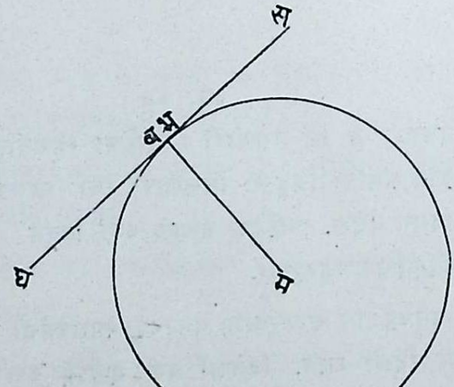
४९·१ मागील अनुच्छेदांत कोणत्याहि वक्राच्या स्पर्शरेषेची अगदी सामान्य अशी परिभाषा दिली आहे. दिलेला वक्र एखादें वृत्त असल्यास त्याची एखाद्या बिंदूशीं असणारी स्पर्शरेषा, तो स्पर्शबिंदु केंद्राशीं जोडून येणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते, हें परिभाषेवरून सहज दिसून येतें.

ब आणि भ हे वृत्तावरील दोन बिंदू असल्यास, $\angle$ मभघ $=$ $\angle$ मबस

आता भ हा बिंदू वृत्तावर सरकून ब च्या अधिकाधिक जवळ येत असतांना देखील वरील समीकार नेहमी सत्य राहतो. म्हणून अंतिम



आ. ४१.१



आ. ४१.२

स्थितींत जेव्हा भ, ब शीं सपाती होतो तेव्हा $\angle$ मभघ = $\angle$ मबस = ९०°
यावरून वृत्ताच्या स्पर्शरेषेची परिभाषा पुढीलप्रमाणें हि देतां येते :–

वृत्ताचें केंद्र त्याच्या परिघावरील एखाद्या बिंदूस जोडणाऱ्या त्रिज्येला

त्या बिंदूशीं लंब असलेली सरळ रेषा म्हणजेच वृत्ताची त्या बिंदूशीं असणारी स्पर्शरेषा होय. त्या बिंदूला स्पर्शबिंदु म्हणतात.

४९.२ $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताच्या (य',र') शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार काढणें.

वर दिलेल्या परिभाषेवरून, (य',र') मधून जाणारी पण वृत्तकेंद्र व (य',र') यांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेस लंब असणारी रेषा हीच वृत्ताची (य',र') शीं असणारी स्पर्शरेषा होय.

आता (य',र') मधून जाणाऱ्या कोणत्याहि सरळ रेषेचा समीकार

$$र-र'=ध(य-य') \qquad (१)$$

आणि $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताचें केंद्र (०, ०) व (य', र') बिंदु यांना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$र=\frac{र'}{य'}य \qquad (२)$$

आता (१) व (२) परस्परांशीं लंब होण्याकरिता

$$ध\frac{र'}{य'}=-१$$

किंवा $$ध=-\frac{य'}{र'}$$

ध च्या या अर्हेचा समीकार (१) मध्ये आदेश करून, स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र-र'=-\frac{य'}{र'}(य-य')$$

किंवा $र'(र-र')+य'(य-य')=०$

किंवा $रर'+यय'=य'^2+र'^2$

पण (य',र') बिंदु वृत्तावर असल्यामुळे

$$य'^2 + र'^2 = क^2$$

$\therefore$ (य',र') शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$यय' + रर' = क^2$$

४९.३. $य^2 + र^2 + २छय + २चर + ग = ०$ या रूपांत वृत्ताचा समीकार घेतल्यास (य',र') शीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार खाली दिल्या-प्रमाणे काढतां येतो.

आता दिलेल्या वृत्ताचें केंद्र (−छ, −च) आहे.

म्हणून (य', र') बिंदु (−छ, −च) केंद्रास जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$र - र' = \frac{र' + च}{य' + छ} (य - य')$$

ही रेषा $र - र' = ध (य - य')$ या (य', र') बिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याहि रेषेला लंब होण्याकरिता,

$$ध \cdot \frac{र' + च}{य' + छ} = -१$$

किंवा, $$ध = -\frac{य' + छ}{र' + च}$$

म्हणून ध च्या अर्हेचा आदेश करून, (य,' र') शीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार,

$$र - र' = -\frac{य' + छ}{र' + च} \cdot (य - य')$$

किंवा, $(र' + च)(र - र') + (य' + छ)(य - य') = ०$

किंवा, $य य' + र र' + छ य + च र = य'^2 + र'^2 + छ य' + च र'$

दोन्ही बाजूंत छय'+चर'+ग मिळवून

$$यय'+रर'+छ(य+य')+च(र+र')+ग$$

$$=य'^{२}+र'^{२}+२\ छय'+२\ चर'+ग$$

परंतु (य,' र') बिंदु वृत्तावर असल्यामुळे

$$य'^{२}+र'^{२}+२\ छय'+२\ चर'+ग=०$$

म्हणून $यय'+रर'+छ(य+य')+च(र+र')+ग=०$ हा इष्ट समीकार होय.

५०. $य^{२}+र^{२}=क^{२}$ वृत्तावरील (य', र') बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार काढणें.

(दुसरी रीति)

समजा ब (य',र') व भ (य'',र'') हे दिलेल्या वृत्तावर संनिध असलेले दोन बिंदू आहेत.

आता बभ चा समीकार

$$र-र'=\frac{र''-र'}{य''-य'}(य-य') \qquad (१)$$

पण (य', र') व (य'', र'') हे दोन्ही बिंदू वृत्तावर असल्यामुळे

$$य'^{२}+र'^{२}=क^{२} \qquad (२)$$

$$व\quad य''^{२}+र''^{२}=क^{२} \qquad (३)$$

(३) मधून (२) उणें करून

$$(य''^{२}-य'^{२})+(र''^{२}-र'^{२})=०$$

किंवा, $(य''-य')\ (य''+य')+(र''-र')\ (र''+र')=०$

किंवा, $$\frac{र''-र'}{य''-य'}=-\frac{य''+य'}{र''+र'} \qquad (४)$$

आता, जेव्हा भ बिंदु वक्रावर ब बिंदूकडे सरकून शेवटीं त्याच्याशीं संपाती होतो तेव्हा बभ रेषा वक्राची स्पर्शरेषा होते. म्हणून $\frac{र''-र'}{य''-य'}$ या निष्पत्तीचें मान अंतिम स्थितींत समीकार (४) च्या दक्षिण पक्षांत य''=य' व र''=र' ठेवून मिळतें.

∴ बभ च्या अंतिम स्थितींत

$$\frac{र''-र'}{य''-य'}=-\frac{२ य'}{२ र'}$$

$$=-\frac{य'}{र'}$$

समीकार (१) मध्ये या अर्हेचा आदेश करून (य', र') शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र-र'=-\frac{य'}{र'}(य-य')$$

किंवा, $रर'+यय'=र'^{२}+य'^{२}$

आता (य', र') वृत्तावर आहे.

∴ $य'^{२}+र'^{२}=क^{२}$

म्हणून (य', र') शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$य'य+रर'=क^{२}$$

५०·१ $य^{२}+र^{२}+२ छय+२ चर+ग=०$ या वृत्तावरील (य', र') या कोणत्याहि बिंदूशीं काढलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार काढणें. (दुसरी रीति)

समजा ब (य', र') आणि भ (य'', र'') हे वृत्तावरील अगदी संनिध असलेले दोन बिंदू आहेत. बभ चा समीकार, मागे दिल्याप्रमाणे,

$$र - र' = \frac{र'' - र'}{य'' - य'} (य - य') \qquad (१)$$

पण (य', र') व (य'', र'') हे दोन्ही बिंदू वृत्तावर असल्यामुळे

$$य'^{२} + र'^{२} + २ छय' + २ चर' + ग = ० \qquad (२)$$

$$य''^{२} + र''^{२} + २ छय'' + २ चर'' + ग = ० \qquad (३)$$

(२) चा (३) मधून वियोग करून,

$$य''^{२} - य'^{२} + र''^{२} - र'^{२} + २ छ (य'' - य') + २ च (र'' - र') = ०$$

किंवा, $(य'' - य')(य'' + य' + २ छ) + (र'' - र')(र'' + र' + २ च) = ०$

$$\therefore \frac{र'' - र'}{य'' - य'} = - \frac{य'' + य' + २ छ}{र'' + र' + २ च}$$

जेव्हा (य'', र'') वक्रावर सरकून शेवटीं (य', र') शीं संपाती होतो, तेव्हा मागील अनुच्छेदांत उल्लेखिल्याप्रमाणे,

$$य'' + य' = २ य' \text{ व } र'' + र' = २ र'.$$

$$\therefore \frac{र'' - र'}{य'' - य'} = - \frac{२ य' + २ छ}{२ र' + २ च}$$

$$= - \frac{य' + छ}{र' + च}$$

या अर्हेचा (१) मध्ये आदेश करून,

$$र - र' = - \frac{(य' + छ)}{(र' + च)} (य - य')$$

किंवा, $(र - र')(र' + च) + (य - य')(य + छ) = ०$

किंवा,

$$यय' + रर' + छय' + चर = य'^{२} + र'^{२} + छय' + चर'$$

दोन्ही बाजूंत छय' + चर' + ग मिळवून

यय' + रर' + छ(य + य') + च(र + र') + ग

= य'^{२} + र'^{२} + २ छय' + २ चर' + ग

परंतु (य', र') बिंदु वृत्तावर असल्यामुळे

य'^{२} + र'^{२} + २ छय' + २ चर' + ग = ०

म्हणून स्पर्शरेषेचा इष्ट समीकार

यय' + रर' + छ (य + य') + च(र + र') + ग = ०

५०.२ एखाद्या वृत्ताच्या (य', र') शीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार लिहिण्याचा नियम :—

वृत्ताच्या समीकारांत

य^{२} च्या जागीं यय'

र^{२} च्या जागीं रर'

२य च्या जागीं य + य,'

आणि २र च्या जागीं र + र'

हे आदेश करून (य,'र') शीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार मिळतो.

५१. अभिलंब

दिलेल्या वक्रावरील एखाद्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेला, तिच्या स्पर्शबिंदूशीं लंब असलेल्या सरळ रेषेला त्या वक्राचा त्या बिंदूशीं असणारा अभिलंब म्हणतात.

५१.१ दिलेला वक्र जेव्हा एक वृत्त असतें तेव्हा त्यावरील ब या कोणत्याहि बिंदूशीं असणारा अभिलंब, वृत्तकेंद्र आणि ब बिंदु यांना जोडणारी

सरळ रेषा असते.

५१.२
$$य^2+र^2=क^2 \qquad (१)$$
या वृत्ताच्या (य', र') बिंदूशीं असलेल्या अभिलंबाचा समीकार काढणे.

(१) ची (य', र') शीं असणारी स्पर्शरेषा
$$यय'+रर'=क^2 \qquad (२)$$
आता (य', र') मधून जाणारी कोणतीहि सरळ रेषा
$$र-र'=ध.(य-य')$$
ही (२) ला लंब होण्याकरिता
$$ध\left(-\frac{य'}{र'}\right)=-१$$
किंवा,
$$ध=\frac{र'}{य'}$$
म्हणून (य', र') मधून जाणारी आणि (२) ला लंब असणारी सरळ रेषा
$$र-र'=\frac{र'}{य'}(य-य')$$
किंवा, $य'(र-र') = र'(य-य')$

किंवा, $य'र-र'य = ०$

पण परिभाषेवरून ही रेषा अभिलंब आहे. म्हणून (य', र') शीं असणाऱ्या अभिलंबाचा इष्ट समीकार
$$य'र-र'य=०$$
५१.३.
$$य^2+र^2+२छय+२चर+ग=० \qquad (१)$$
या वृत्ताला (य',र') शीं असलेल्या अभिलंबाचा समीकार.

(१) च्या (य',र') शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$यय' + रर' + छ(य + य') + च(र + र') + ग = ० \qquad (२)$$

आता, स्पर्शरेषेचा 'ध' $= -\frac{य' + छ}{र' + च}$

∴ स्पर्शरेषेचा लंब असणाऱ्या

$$रेषेचा\ 'ध' = \frac{र' + च}{य' + छ}$$

म्हणून, (य',र') मधून जाणाऱ्या व (२) ला लंब असणाऱ्या रेषेचा, अर्थात् अभिलंबाचा समीकार

$$र - र' = \frac{र' + च}{य' + छ}(य - य')$$

किंवा, $(य' + छ)(र - र') - (र' + च)(य - य') = ०$

किंवा, $र(य' + छ) - य(र' + च) + चय' - छर' = ०$

अभ्यासः- एखाद्या वृत्ताचा त्याच्या कोणत्याहि बिंदूशीं असणारा अभिलंब, तो बिंदु आणि वृत्तकेंद्र यांना जोडणारी रेषा असते या गुण-धर्माचा उपयोग करून अभिलंबाचा वर काढलेला समीकार काढा.

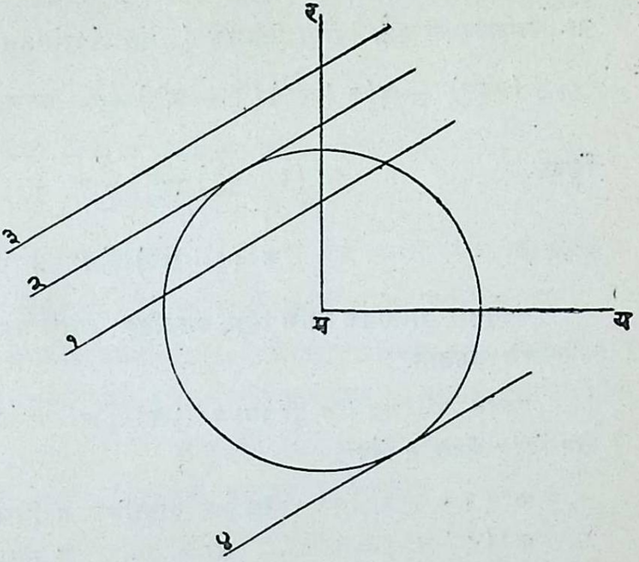
५२. $र = धय + ग$ या सरळ रेषेचें आणि $य^२ + र^२ = क^२$ या वृत्ताचे छेदनबिंदू.

$$र = धय + ग \qquad (१)$$

ही रेषा

$$य^२ + र^२ = क^२ \qquad (२)$$

या वृत्ताला ज्या बिंदूंत छेदते त्या बिंदूंचे याम दोन्ही समीकारांचें समाधान करतात; म्हणून हे समीकार य व र करिता सोडवून ते याम काढतां येतात.



आ. ४२

(१) व (२) मधून र चें निरसन करून,

$$य^2 + (धय + ग)^2 = क^2$$

किंवा $$(१ + ध^2)य^2 + २ धगय + ग^2 - क^2 = ० \qquad (३)$$

आता, समीकार (१) य व र मधील रेखीय समीकार असल्या-मुळे य च्या प्रत्येक अर्हेशीं र ची केवळ एकच अर्हा संवादी असते. समीकार (३) य मधे द्विघातीय आहे, म्हणून य च्या दोन अर्हा येतात आणि समीकार (१) वरून त्या अर्हांशीं संवादी असणाऱ्या र च्या दोन अर्हा येतात. य आणि र यांच्या संवादी अर्हा दोन बिंदूंचे याम देतात.

म्हणून कोणतीहि सरळ रेषा एखाद्या वृत्तास सामान्यतः दोन बिंदूंत छेदते.

आता $$(१+ध^२)य^२+२धगय+ग^२-क^२=० \qquad (३)$$
या समीकाराचीं मूळें, त्याचा विवेचक (discriminant)

$$(२धग)^२-४(१+ध^२)(ग^२-क^२) \gtreqless ० \text{ असेल,}$$

किंवा, $$क^२(१+ध^२)-ग^२ \gtreqless ० \quad ,,$$

,, $$क^२(१+ध^२) \gtreqless ग^२ \quad ,,$$

तदनुसार वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक आणि समान, किंवा काल्पनिक असतात.

म्हणून, $र=धय+ग$ ही रेषा $य^२+र^२=क^२$ या वृत्तास ज्या दोन बिंदूंत छेदते, ते बिंदू

$क^२(१+ध^२)>ग^२$ असेल तर वास्तविक व भिन्न,
$क^२(१+ध^२)=ग^२$,, तर ,, व संपाती,
$क^२(१+ध^२)<ग^२$,, तर काल्पनिक असतात.

आकृतींत १, २ व ३ या अंकांनी दर्शविलेल्या रेषांचा ध एकच आहे, अर्थात् त्या एकमेकांस समांतर आहेत.

सरळ रेषा १ वृत्ताला दोन वास्तविक व भिन्न बिंदूंत छेदते. ती $ग^२<क^२(१+ध^२)$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे.

सरळ रेषा २, वृत्ताला दोन वास्तस्विक आणि संपाती बिंदूंत छेदते. ती $ग^२=क^२(१+ध^२)$ वरून मिळणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे. ही रेषा वृत्ताला दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत मिळत असल्यामुळे ती वृत्ताची स्पर्शरेषा आहे.

सरळ रेषा ३, वृत्ताला कोणत्याच वास्तविक बिंदूंत छेदत नाही. हें विधान अन्य शब्दांत मांडावयाचें म्हणजे ही रेषा वृत्ताला दोन काल्प-

निक बिंदूंत छेदते. ती $ग^2 > क^2(१+घ^2)$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे.

५२.१. घ च्या सर्व अर्हांकरिता, $र = घय + ग$ ही सरळ रेषा $य^2 + र^2 = क^2$ या वृत्ताची स्पर्शरेषा असण्याकरिता प्रतिबंध.

जर $ग^2 = क^2(१+घ^2)$ असेल तर

$र = घय + ग$ ही रेषा $य^2 + र^2 = क^2$ या वृत्तास दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत छेदते हें मागील अनुच्छेदांत आपण पाहिलेंच आहे.

आता कोणतीहि सरळ रेषा एखाद्या वक्रास दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत मिळत असेल तर परिभाषेवरून ती वक्राची स्पर्शरेषा होते.

म्हणून घ ची कोणतीहि अर्हा असली तरी $र = घय + ग$ ही $य^2 + र^2 = क^2$ या वृत्ताची स्पर्शरेषा व्हावी म्हणून

$$ग^2 = क^2 \; (१+घ^2)$$

किंवा $$ग = \pm क \sqrt{१+घ^2}$$

करणीचें धन चिन्ह घेऊन, घ च्या सर्व अर्हांकरिता, वृत्ताच्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = घय + क\sqrt{१+घ^2} \qquad (१)$$

अर्थात् घ चें मान कोणतेंहि असलें तरी $र = घय + क\sqrt{१+घ^2}$ ही रेषा $य^2 + र^2 = क^2$ या वृत्ताची नेहमी स्पर्शरेषा असते.

करणीमागे ऋण चिन्ह घेतल्यास,

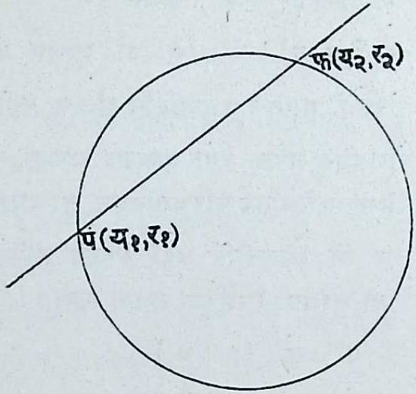
$$र = घय - क\sqrt{१+घ^2} \qquad (२)$$

ही सुद्धा वृत्ताची स्पर्शरेषा आहे.

(१) व (२) या रेषांचे 'घ' एकच आहेत. म्हणून त्या एकमेकांस समांतर आहेत.

यावरून, ध च्या दिलेल्या अर्हेनुसार नेहमी एकमेकांस समांतर असलेल्या दोन स्पर्शरेषा असतात. मागील अनुच्छेदाच्या आकृतींत या स्पर्शरेषा २ व ४ या अंकांनी दर्शविल्या आहेत.

५२.२ $र = धय + ग$ या सरळ रेषेवर $य^२ + र^२ = क^२$ या वृत्ताने खंडित केलेल्या जीवेचीं (chord) लांबी काढणें.



आ. ४३

अनुच्छेद ५२ मधे दिल्याप्रमाणे, $र = धय + ग$ ही रेषा $य^२ + र^२ = क^२$ या वृत्ताला ज्या दोन बिंदूंत छेदते त्या $प(य_१, र_१)$ व $फ(य_२, र_२)$ या दोन बिंदूंचे $य_१$ आणि $य_२$ हे भुज

$$(१ + ध^२)\, य^२ + २धगय + ग^२ - क^२ = ०$$

या द्विघातसमीकाराचीं मुळें आहेत.

म्हणून, बैजिकीने

$$य_१ + य_२ = -\frac{२धग}{१ + ध^२}$$

$$य_१ य_२ = \frac{ग^२ - क^२}{१ + ध^२}$$

आता, $(य_१ - य_२)^२ = (य_१ + य_२)^२ - ४य_१य_२$

$$= \frac{४घ^२ग^२}{(१+घ^२)^२} - \frac{४(ग^२ - क^२)}{१+घ^२}$$

$$= \frac{४घ^२ग^२ - ४(ग^२ - क^२)(१+घ^२)}{(१+घ^२)^२}$$

$$= \frac{४}{(१+घ^२)^२}\left\{ क^२(१+घ^२) - ग^२ \right\}$$

$$\therefore \quad य_१ - य_२ = \pm \frac{२}{१+घ^२} \times \sqrt{क^२(१+घ^२) - ग^२}$$

प, फ बिंदू $र = धय + ग$ रेषेवर असल्यामुळे

$$र_१ = धय_१ + ग$$

$$र_२ = धय_२ + ग$$

वियोग करून,

$$र_१ - र_२ = ध(य_१ - य_२)$$

आता,

$$पफ^२ = (य_१ - य_२)^२ + (र_१ - र_२)^२$$

$$= (य_१ - य_२)^२ + ध^२(य_१ - य_२)^२$$

$$= (य_१ - य_२)^२ \; (१+ध^२)$$

पफ ची लांबीच काढावयाची असल्यामुळे उजव्या बाजूचें वर्गमूळ धन घ्यावें लागतें. म्हणून, पफ जीवेची लांबी

$$= \sqrt{१+घ^२}(य_१ - य_२)$$

$$= \sqrt{१+घ^२}, \frac{२}{(१+घ^२)} \cdot \sqrt{क^२(१+घ^२) - ग^२}$$

$$= २\sqrt{\frac{क^२(१+घ^२) - ग}{१ + घ^२}}$$

उपसाध्यः– दिलेल्या रेषेवर वृत्ताने खंडित केलेल्या जीवेची लांबी शून्य होते तेव्हा ती रेषा वृत्ताची स्पर्शरेषा होते. अशा वेळीं वरील फलांतील अंश शून्य होतो.

अर्थात् $क^2(१+ध^2)-ग^2=०$

किंवा $ग^2=क^2(१+ध^2)$

म्हणून $ग^2=क^2(१+ध^2)$ असल्यास $र=धय+ग$ ही रेषा वृत्ताचीं स्पर्शरेषा होते.

हाच प्रतिबंध निराळ्या रीतीने अनुच्छेद ५२.१ मधे काढला आहे.

५३. एखाद्या वृत्तास कोणत्याहि बिंदूपासून वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती, किंवा काल्पनिक अशा दोन स्पर्शरेषा काढतां येतात हें दाखविणें.

समजा $(य_१, र_१)$ हा दिलेला बिंदु असून वृत्ताचा समीकार $य^2+र^2=क^2$ हा आहे.

आता, ध च्या सर्व अर्हांकरिता, $र=धय+क\sqrt{१+ध^2}$ हा समीकार वृत्ताची स्पर्शरेषा निरूपितो.

ही रेषा $(य_१, र_१)$ मधून गेल्यास

$$र_१=धय_१+क\sqrt{१+ध^2}$$

किंवा, $र_१-धय_१=क\sqrt{१+ध^2}$

किंवा, $(र_१-धय_१)^2=क^2(१+ध^2)$

किंवा, $ध^2(य_१^2-क^2)-२धय_१र_१+र_१^2-क^2=०$ (१)

हा ध मधे द्विघातीय समीकार आहे. म्हणून $य_१$, $र_१$ यांच्या दिलेल्या अर्हांनुसार त्या पासून ध च्या वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व समान, किंवा काल्पनिक अशा दोन अर्हा मिळतात.

यांतील ध च्या प्रत्येक अर्हेकरिता $(य_१, र_१)$ मधून जाणारी स्पर्शरेषा मिळते. म्हणून $(य_१, र_१)$ या बिंदूतून जाणाऱ्या आणि वृत्ताला स्पर्श

करणाऱ्या नेहमी दोन रेषा असतात. समीकार (१) चीं मूळे वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व समान, किंवा काल्पनिक असतील तदनुसार $(य_१, र_१)$ मधून जाणाऱ्या दोन स्पर्शरेषा वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती किंवा काल्पनिक राहतील.

आता,

$$(२य_१ र_१)^२ - ४(य_१^२ - क^२)(र_१^२ - क^२) \gtreqless ० \text{ असेल,}$$

किंवा,

$$क^२(य_१^२ + र_१^२ - क^२) \gtreqless ० \quad ,,$$

,,

$$य_१^२ + र_१^२ \gtreqless क^२ \quad ,,$$

तदनुसार समीकार (१) चीं मूळें वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व समान किंवा काल्पनिक असतात.

परंतु, अनुच्छेद ४८ वरून $य_१^२ + र_१^२ \lesseqgtr क^२$ असेल तदनुसार $(य_१, र_१)$ बिंदु $य^२ + र^२ = क^२$ वृत्ताच्या बाहेर, वर किंवा आंत असतो.

म्हणून,

(१) $(य_१, र_१)$ बिंदु वृत्ताच्या बाहेर असल्यास त्यापासून वृत्ताला काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा वास्तविक व भिन्न असतात.

(२) $(य_१, र_१)$ बिंदु वृत्तावर असल्यास त्यापासून वृत्ताला काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा एकाच वास्तविक स्पर्शरेषेंत अर्थात् वृत्ताला त्या बिंदूशीं काढलेल्या स्पर्शरेषेंत विलीन होतात.

(३) $(य_१, र_१)$ बिंदु वृत्ताच्या आंत असल्यास त्यापासून वृत्ताला काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा काल्पनिक असतात. म्हणून अशा बिंदूपासून दोन वास्तविक स्पर्शरेषा रैखिकीने काढणें शक्य नसते.

उदाहरण संग्रह ७

(१) पुढील वृत्तांचें समीकार काढा :-

(१) त्रिज्या ३ व केंद्र (१,२)

(२) त्रिज्या १० व केंद्र (–३, –४)

(३) त्रिज्या (क+ख), व केंद्र (क, –ख)

(२) खालील पैकी प्रत्येक वृत्ताचें केंद्र आणि त्रिज्या काढा:-

(१) $य^२+र^२-४य-८र=४१$

(२) $य^२+र^२-य-र=०$

(३) $य^२+र^२=२कय$

(४) $३य^२=र(७-३र)$

(५) $७य^२+३र^२-४र=(१-२य)^२$

(३) पुढील वृत्तांचे समीकार काढा:-

(१) (१, –२) व (३, –४) मधून जाणारें व य–अक्षाला स्पर्श करणारें. (बनारस १९३५)

(२) (३, –२) मधून जाणारें व य–अक्ष आणि य+१=० ही रेषा यांना स्पर्श करणारें. (आंध्र १९२०)

(३) य=०, य=क आणि ३य+४र+५क=० या रेषांना स्पर्श करणारें. (नागपूर १९२९)

(४) य–अक्षावर धन दिशेस ६ लांबीचा अंतःखंड कापणारें व र–अक्षाला मूलबिंदूपासून +४ अंतरावर स्पर्श करणारें. (नागपूर १९३१)

(५) (४,३) बिंदु केंद्र असणारें व ५य–१२र–१०=० या रेषेला स्पर्श करणारें. (मद्रास १९२२)

(६) (०,१), (−२,०) व मूलबिंदु यांतून जाणारें. (त्रावणकोर १९२२)

(७) (२,३) व (१,−२) हे बिंदू व्यासाचीं टोकें असणारें. (मैसूर १९४४)

(४) (क,०), (ख,०) मधून जाणाऱ्या व र−अक्षाला स्पर्श करणाऱ्या वृत्तांचे समीकार

$य^2+र^2-(क+ख)य\pm२\sqrt{कख}र+कख=०$ आहेत हें दाखवा. (बनारस १९२)

(५) $३य+४र=०$, $१२र-५य=०$, $र=१५$ या रेषांमुळे बनलेल्या त्रिकोणाच्या अंतर्वृत्ताचें केंद्र काढा. (नागपूर १९३९)

(६) यामाक्ष आणि $३य+४र=५$ ही रेषा यांनी बनलेल्या त्रिकोणाच्या अंतर्वृत्ताचा समीकार काढा. (बनारस १९३०)

(७) $३य-४र+१०=०$ व $५य-१२र+१३=०$ या रेषा अनुक्रमें $य^2+र^2=४$ व $य^2+र^2=१$ या वृत्तांच्या स्पर्शरेषा असून $१४य+८र+६५=०$ ही रेषा या स्पर्शरेषामधील एका कोणाची द्विभाजक आहे हें दाखवा. (मैसूर १९४४)

(८) ऊ च्या सर्व अर्हांकरिता $र=यस्पऊ+क$ व्युज्ज्या ऊ ही रेषा $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताला स्पर्श करते हें दाखवा. (दिल्ली १९३५)

(९) $य+र=२$ ही रेषा $य^2+र^2=२$ आणि $य^2+र^2+३य+३र-८=०$ या वृत्तांना एकाच बिंदूशीं स्पर्श करते हें दाखवा. (नागपूर १९३५)

(१०) $य+\sqrt{३}र=८$ ही रेषा $य^2+र^2=१६$ या वृत्ताला स्पर्श करते हें दाखवून स्पर्शबिंदूचे याम काढा. $य+\sqrt{३}र-८=०$ या

रेषेला लंब असणाऱ्या या वृत्ताच्या स्पर्शरेषांचे समीकार काढा.
(आंध्र १९४१)

(११) (—१,७) मधून जाणाऱ्या व $य^2+र^2=२५$ या वृत्ताला स्पर्श करणाऱ्या रेषांचे समीकार काढा व त्या रेषा एकमेकांस लंब आहेत हें दाखवा. (मैसूर १९३५)

(१२) $य^2+र^2-६य-२र+६=०$ या वृत्ताने $य=र$ रेषेवर खंडित केलेल्या जीवेची लांबी काढा. (मैसूर १९४३)

(१३) $य^2+र^2=क^2$ वृत्ताने $र=धय+ग$ रेषेवर खंडित केलेल्या जीवेची लांबी २ख असल्यास $ग^2=(१+ध^2)(क^2-ख^2)$ हें दाखवा. (मद्रास १९४२)

(१४) $य+र=ऋ$ ही रेषा व $य^2+र^2-२य-२र+१=०$ हें वृत्त यांचे छेदनबिंदू मूलबिंदूला जोडणाऱ्या रेषायुग्माचा समीकार काढा. यावरून, $य+र=ऋ$ या रेषेने दिलेल्या वृत्ताला स्पर्श करण्याकरिता प्रतिबंध काढा. (कलकत्ता १९२२)

(१५) $३य^2+३र^2-६य-८र=०$ हें वृत्त अनुरेखा व यास मूलबिंदूशीं स्पर्श करणाऱ्या रेषेचा समीकार काढा.

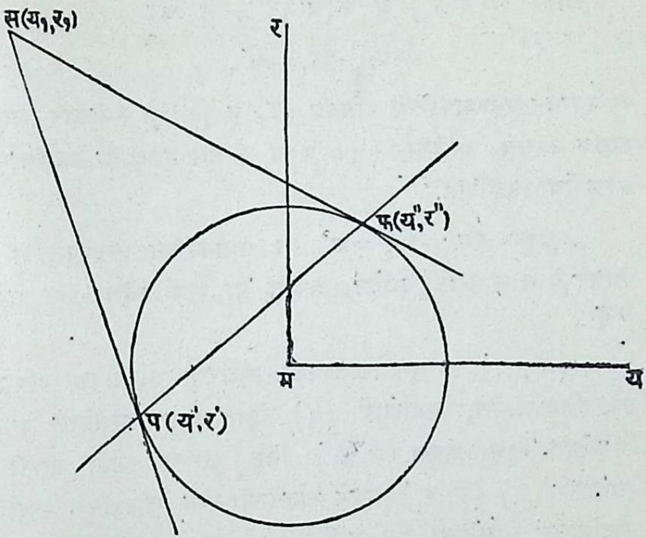
(१६) य—अक्षाला स्पर्श करणाऱ्या व र—अक्षावर 'न' इतका अचल लांबीचा अंतःखंड करणाऱ्या वृत्ताच्या केंद्राच्या पथाचा समीकार काढा. (नागपूर १९३८)

---

५४ स्पर्शजीवेची सामान्य परिभाषा :

एखादा वक्राबाहेरील स या कोणत्याहि बिंदूपासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा त्या वक्राला प व फ बिंदूंत स्पर्श करीत असल्यास त्या स्पर्शबिंदूंना जोडणाऱ्या प फ या सरळ रेषा स पासून काढलेल्या स्पर्श-रेषांची स्पर्शजीवा (chord of contact) म्हणतात.

५४.१ $य^२+र^२=क^२$ या वृत्ताला ($य_१, र_१$) ह्या बाह्यबिंदूपासून काढलेल्या स्पर्शरेषांच्या स्पर्शजीवेचा समीकार काढणें.



आ. ४४

समजा की $य^२+र^२=क^२$ या वृत्ताला स ($य_१, र_१$) पासून काढलेल्या सप व सफ या स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदू प (य', र') व फ (य'', र'') आहेत.

प व फ शीं असलेल्या स्पर्शरेषांचे समीकार

$$यय' + रर' = क^२ \quad (१)$$

$$यय'' + रर'' = क^२ \quad (२)$$

(१) व (२) या दोन्ही स्पर्शरेषा स($य_१, र_१$) बिंदूंत छेदतात. अर्थात् त्या स ($य_१, र_१$) मधून जातात.

म्हणून $य_1 य' + र_1 र' = क^2$ (३)

व $य_1 य'' + र_1 र'' = क^2$ (४)

आतां प(य',र') व फ(य'',र'') हे बिंदू

$$यय_1 + रर_1 = क^2 \quad (५)$$

या पथावर असण्याकरिता प्रतिबंध (३) व (४) हे समीकार असून ते पाळले जातात. समीकार (५) य व र मधे एकघाती असल्यामुळे तो सरळ रेषा निरूपितो.

म्हणून $यय_1 + रर_1 = क^2$ या समीकाराने निरूपिलेल्या सरळ रेषेवर प व फ हे बिंदू आहेत; अर्थात् हा स्पर्शजीवेचा इष्ट समीकार आहे.

($य_1$, $र_1$) पासून काढलेल्या स्पर्शरेषा वास्तविक असोत वा काल्पनिक असोत, समीकार (५) नेहमी एक वास्तविक सरळरेषा निरूपितो. म्हणून जेव्हा ($य_1$, $र_1$) बिंदु वृत्ताच्या आंत असतो तेव्हा समीकार (५) ($य_1$,$र_1$) मधून काढलेल्या दोन काल्पनिक स्पर्शरेषांची स्पर्शजीवा निरूपितो असें मानलें जातें. या प्रकारांत स्पर्शबिंदू जरी काल्पनिक असले तरी या दोन काल्पनिक बिंदूना जोडणारी स्पर्शजीवा मात्र वास्तविक असते.

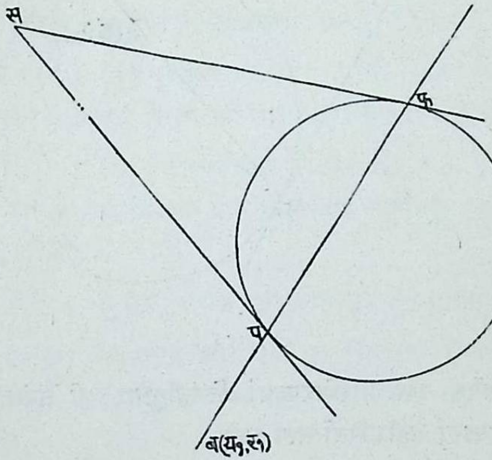
जेव्हां ($य_1$,$र_1$) बिंदु वृत्तावर असतो तेव्हां त्याची स्पर्शजीवा त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेशीं संपाती होते. स्पर्शजीवेचे व स्पर्शरेषेचे समीकार एकच आहेत. यावरूनहि या विधानाची सत्यता दिसून येते.

५५. ध्रुव आणि ध्रुवीय : सामान्य परिभाषा:—

समजा की एखाद्या वक्राच्या आंतील किंवा बाहेरील ब या कोणत्याहि बिंदूपासून वक्रास प व फ बिंदूंत छेदणारी कोणतीहि सरळ रेषा काढलीं तर अशा रेषांच्या निरनिराळया स्थितींनुसार वक्राच्या प व फ बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषा ज्या बिंदूंत छेदतात त्या बिंदूच्या पथास

ब चा त्या वक्राला अनुलक्षून **ध्रुवीय** (polar) म्हणतात. आणि ब बिंदूस ध्रुवीयाचा **ध्रुव** (pole) म्हणतात.

४५.१ $य^2+र^2=क^2$ वृत्ताला अनुलक्षून $ब(य_1, र_1)$ बिंदूच्या ध्रुवीयाचा समीकार काढणें.



आ. ४५.१.

$ब(य_1, र_1)$ मधून जाणारी व वृत्तास प व फ बिंदूंत छेदणारी बपफ ही कोणतीहि जीवा आहे. प व फ शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषा स (त,थ) बिंदूंत मिळतात. आता आपण स बिंदूचा पथ काढूं.

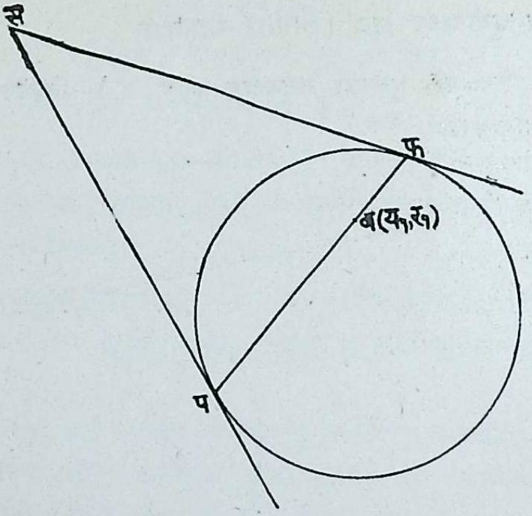
(त,थ) बिंदूंच्या स्पर्शजीवेचा अर्थात् पफ चा समीकार

$$तय+थर=क^2$$

आहे.

ही रेषा $(य_1,र_1)$ मधून जाते.

$$\therefore\ य_1त+र_1थ=क^2$$



आ. ४५.२

बपफ च्या निरनिराळ्या स्थितींनुसार हा संबंध (त,थ) च्या निरनिराळ्या अर्हांकरिता सत्य आहे.

म्हणून (त, थ) चा प

या समीकाराने निरूपिला जातो. म्हणून हा ($य_1, र_1$) बिंदूच्या ध्रुवीयाचा इष्ट समीकार आहे. हा समीकार य व र मधे एकघाती असल्यामुळे तो सरळ रेषा निरूपितो.

म्हणून ($य_1, र_1$) बिंदूचा ध्रुवीय एक सरळ रेषा असून त्याचा समीकार

$$यय_1 + रर_1 = क^2$$

हा आहे.

५५.२ तसेंच $य^२+र^२+२छय+२चर+ग=०$ वृत्ताला अनुलक्षून $(य_१,र_१)$ चा ध्रुवीय $यय_१+रर_१+छ(य+य_१)+च(र+र_१)+ग=०$ हा आहे हें सिद्ध करतां येतें.

५६. $(य_१,र_१)$ चा ध्रुवीय आणि स्पर्शजीवा यांचे समीकार एकच आहेत हें दिसून येईल. यावरून $(य_१,र_१)$ हा बिंदु वृत्तावाहेर असल्यास त्याचा ध्रुवीय (किंवा ध्रुवीरेषा) स्पर्शजीवेशीं संपाती होतो.

$(य_१,र_१)$ बिंदु वृत्तावर असल्यास त्याचा ध्रुवीय आणि स्पर्शजीवा ही दोन्ही त्या बिंदूशी असणाऱ्या स्पर्शरेषेशीं संपाती होतात.

$(य_१,र_१)$ बिंदु वृत्ताच्या आंत असल्यास$(य_१,र_१)$ पासून काढलेल्या दोन काल्पनिक स्पर्शरेषांच्या दोन काल्पनिक स्पर्शबिंदूंना जोडणारी रेषाच ध्रुवीयरेषा होते.

५६.१. म्हणून ध्रुव व ध्रुवीय यांच्या परिभाषा पुढे दिल्याप्रमाणे देता येतात.

एखाद्या बिंदूपासून काढलेल्या स्पर्शरेषांच्या (वास्तविक किंवा काल्पनिक) स्पर्शबिंदूंतून जाणाऱ्या सरळ रेषेला त्या बिंदूचा ध्रुवीय म्हणतात.

एखादी सरळ रेषा वृत्ताला ज्या (वास्तविक किंवा काल्पनिक) बिंदूंत छेदते त्या बिंदूंशीं काढलेल्या स्पर्शरेषांच्या छेदन बिंदूस दिलेल्या रेषेचा ध्रुव म्हणतात.

५७. प बिंदूचा ध्रुवीय फ बिंदूंतून जात असल्यास फ चा ध्रुवीय प तून जातो.

समजा प व फ बिंदू अनुक्रमें $(य_१,र_१)$ व $(य_२,र_२)$ हे आहेत.

आता $(य_१,र_१)$ चा ध्रुवीय

$$यय_१+रर_१=क^२ \qquad (१)$$

ही रेषा $(य_२,र_२)$ मधून जात असल्यास

$$य_१य_२+र_१र_२=क^२ \qquad (२)$$

आता फ चा ध्रुवीय

$$य_२य+र_२र=क^२ \qquad (३)$$

हा $(य_१,र_१)$ मधून जाण्याकरिता प्रतिबंध

$$य_१य_२+र_१र_२=क^२$$

आणि (२) मुळे तो अगोदरच पाळला गेला आहे. म्हणून फ चा ध्रुवीय प तून जातो.

टीपः— $य_१य_२+र_१र_२=क^२$ हा प्रतिबंध $य_१,य_२$ आणि $र_१,र_२$ मधे संमितीय (symmetrical) असल्यामुळे असा निष्कर्ष निघतो की $(य_१,र_१)$ चा ध्रुवीय $(य_२,र_२)$ मधून जात असल्यास $(य_२,र_२)$ चा ध्रुवीय $(य_१,र_१)$ मधून जातो. तसेंच व्यत्यासतःहि.

५७.१ उपसाध्य१ :—प आणि फ या दोन बिंदूंच्या ध्रुवीयांचा छेदनबिंदु पफ रेषेचा ध्रुव असतो. प व फ च्या ध्रुवीयांचा छेदनबिंदु स ने दर्शवा. आता स दोन्ही ध्रुवीयांवर आहे. अर्थात्

(१) प चा ध्रुवीय स मधून जातो.

म्हणून वरील प्रमेयानुसार स चा ध्रुवीय प तून जात असला पाहिजे.

(२) तसेंच, फ चा ध्रुवीय स तून जात असल्यामुळे स चा ध्रुवीयहि फ तून जात असला पाहिजे.

यावरून, स चा ध्रुवीय प व फ या दोन बिंदूतून जातो. आता ध्रुवीय नेहमी एक सरळरेषा असल्यामुळे आणि दोन बिंदु एक सरळ रेषा अनन्यपणे निश्चित करीत असल्यामुळे पफ रेषा हीच स बिंदूचा ध्रुवीय होईल.

म्हणून, स बिंदू पफ रेषेचा ध्रुव आहे.

५८. **एखाद्या वृत्ताला अनुलक्षून दिलेल्या रेषेचा ध्रुव काढणे.**

समजा दिलेल्या रेषेचे व वृत्ताचें समीकार अनुक्रमें

$$\text{काय}+\text{खार}+\text{गा}=० \qquad (१)$$

आणि $$\text{य}^{२}+\text{र}^{२}+२\text{छय}+२\text{चर}+\text{ग}=० \qquad (२)$$

हे आहेत.

समजा की (२) ला अनुलक्षून (१) च्या ध्रुवाचे याम (त,थ) आहेत.

मग (२) ला अनुलक्षून (त,थ) च्या ध्रुवीयाचा समीकार

$$\text{तय}+\text{थर}+\text{छ}(\text{य}+\text{त})+\text{च}(\text{र}+\text{थ})+\text{ग}=०$$

किंवा, $$(\text{त}+\text{छ})\text{य}+(\text{थ}+\text{च})\text{र}+\text{छत}+\text{चथ}+\text{ग}=० \qquad (३)$$

परंतु समीकार (१) हा (त,थ) चा ध्रुवीय आहे.

म्हणून (१) व (३) हे समीकार ऐकात्मिक असले पाहिजेत. त्यांतील गुणकांची तुलना करून

$$\frac{\text{त}+\text{छ}}{\text{का}}=\frac{\text{थ}+\text{च}}{\text{खा}}=\frac{\text{छत}+\text{चथ}+\text{ग}}{\text{गा}} \qquad (४)$$

समीकार (४) वरून मिळणाऱ्या त, थ च्या अर्हा ध्रुवाचे इष्ट याम होतील.

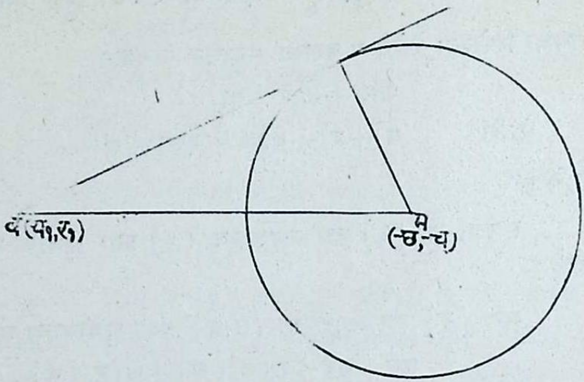
५९. **ब ($\text{य}_{१}$, $\text{र}_{१}$) या बाह्यबिंदूपासून वृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषेची लांबी काढणे.**

समजा की वृत्ताचा समीकार $\text{य}^{२}+\text{र}^{२}+२\text{छय}+२\text{चर}+\text{ग}=०$ आहे. म्हणून त्याच्या केन्द्राचे याम (–छ,–च) असून त्रिज्या $\sqrt{\text{छ}^{२}+\text{च}^{२}-\text{ग}}$ आहे. ब ($\text{य}_{१}$,$\text{र}_{१}$) बिंदूपासून वृत्ताला बभ ही स्पर्शरेष काढा आणि ब व भ हे बिंदु वृत्तकेंद्र म ला जोडा.

बभम या लंबकोण त्रिकोणांत,

$$\text{बम}^{२}=\text{बभ}^{२}+\text{भम}^{२}$$

$$\therefore \quad \text{बभ}^{२}=\text{बम}^{२}-\text{भम}^{२}$$



४६

आता $\quad बम^2 = (य_1 + छ)^2 + (र_1 + च)^2$

आणि $\quad भम^2 = छ^2 + च^2 - ग$

$\therefore \quad बभ^2 = (य_1 + छ)^2 + (र_1 + च)^2 - (छ^2 + च^2 - ग)$

$$= य_1^2 + र_1^2 + २छय_1 + २चर_1 + ग$$

हा संबंध स्पर्शरेषेची इष्ट लांबी देतो.

टीप :— $(य_1, र_1)$ बिंदूपासून वृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषेच्या लांबीचा वर्ग वृत्ताच्या समीकारांतील व्यंजकांत य, र च्या जागीं $य_1$, $र_1$ लिहून मिळवितां येतो हें लक्षांत ठेवावें.

५९.१ उदा:— एका बिंदूचें एका स्थिर बिंदूपासूनचें अंतर आणि त्या बिंदूपासून एका दिलेल्या वृत्ताला काढलेली स्पर्शरेषा यांची निष्पत्ति अचल असल्यास त्या बिंदूचा पथ एक वृत्त आहे हें सिद्ध करा.

समजा की दिलेल्या वृत्ताचा समीकार

$$य^2 + र^2 + २छय + २चर + ग = ० \qquad (१)$$

हा असून मूलबिंदु (०, ०) हा स्थिर बिंदु आहे.

समजा, $(य_1, र_1)$ हा असा बिंदु आहे की त्याचें मूलबिंदूपासूनचें अंतर आणि $(य_1, र_1)$ पासून दिलेल्या वृत्ताला अर्थात् (१) ला काढलेली स्पर्शरेषा यांची निष्पत्ति अचल आहे.

आता $(य_1, र_1)$ बिंदूचें मूलबिंदूपासून अंतर

$$= \sqrt{य_1^2 + र_1^2}$$

आणि $(य_1, र_1)$ पासून वृत्त (१) ला काढलेल्या स्पर्शरेषेची लांबी

$$= \sqrt{(य_1^2 + र_1^2 + २छय_1 + २चर_1 + ग)}$$

म्हणून दिलेल्या प्रतिबंधानुसार

$$\frac{\sqrt{य_1^2 + र_1^2}}{\sqrt{(य_1^2 + र_1^2 + २छय + २चर_1 + ग)}} = \text{अचल} = \frac{१}{न} \text{ (समजा)}$$

याचा वर्ग व पुनर्रचना करून

$$(१ - न^2)(य_1^2 + र_1^2) + २छय_1 + २चर_1 + ग = ० \quad (२)$$

(२) मधे $य_1 र_1$ च्या जागीं य,र लिहून इष्ट पथाचा समीकार मिळतो.

म्हणून $(१ - न^2)(य^2 + र^2) + २छय + २चर + ग = ०$

हा इष्ट समीकार आहे.

या समीकारांत $य^2$ व $र^2$ चे गुणक समान असून यर युक्त पदाचा अभाव आहे. म्हणून हा समीकार एक वृत्त निरूपितो.

६०. शा = ० व शा' = ० हे दोन पथांचे समीकार असल्यास शा + ऋशा' = ० या समीकाराचें निर्वचन करणें.

एखाद्या बिंदूचें याम शा = ० व शा' = ० या दोहोंचेंहि समाधान करीत असल्यास तो बिंदु शा = ० व शा' = ० या दोन्ही पथांवर असतो; अर्थात् तो दोन पथांचा छेदनबिंदु असतो.

म्हणून छेदनबिंदूंचे याम शा = ० व शा' = ० याचे युगपत् समाधान करतात.

आता, कोणत्याहि छेदन बिंदूचें याम, त्यांचा शा आणि शा' मधे आदेश केल्यावर, त्यांना पृथक् शून्यासमान करतात; म्हणून तेच याम ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता, शा + ऋशा' ला सुद्धा शून्यासमान करतात, म्हणजेच शा + ऋशा' = ० या समीकाराचें समाधान करतात. अर्थात् शा + ऋशा' = ० या समीकाराने निरूपिलेल्या पथावर शा = ० व शा' = ० यांचा कोणताहि छेदनबिंदु असतो. म्हणून शा = ० व शा' = ० यांचे सर्व छेदनबिंदु ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता शा + ऋशा' = ० ने निरूपिलेल्या वक्रावर असतात. अर्थात् ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता शा + ऋशा' = ० हा समीकार शा = ० व शा' = ० यांच्या छेदनबिंदूंतून जाणारा वक्र निरूपितो.

६१. $$शा \equiv य^2 + र^2 + २छ य + २च र + ग = ० \qquad (१)$$

आणि $$शा' \equiv य^2 + र^2 + २छ'य + २च'र + ग' = ० \qquad (२)$$

हे समीकार दोन वृत्तें निरूपित असल्यास

$$शा + ऋशा' = ०$$

हा, समीकार ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता, शा = ० व शा' = ० या दोन वृत्तांच्या छेदनबिंदूमधून जाणारें वृत्त निरूपितो हें सिद्ध करणें.

शा = ० व शा' = ० यांचे युगपत् समाधान करणाऱ्या य व र च्या अर्हा ऋ ची कोणतीहि अर्हा असली तरी शा + ऋशा' = ० या समीकाराचे समाधान करतात. दुसऱ्या शब्दांत हेंच असें सांगतां येईल की ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता शा + ऋशा' = ० हा समीकार, शा = ० व शा' = ० यांच्या साधारण बिंदूंमधून जाणारा पथ निरूपितो.

आता $$शा + ऋशा' \equiv [(१ + ऋ)(य^2 + र^2) + २(छ + ऋछ')य$$
$$+ २(च + ऋच')र + (ग + ऋग')] = ०$$

यांत $य^2$ आणि $र^2$ यांचे गुणक समान आणि यर युक्त पदाचा अभाव असल्यामुळे तो एक वृत्त निरूपितो हें सहज दिसून येईल.

म्हणून ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता $शा + ऋशा' = ०$ हा समीकार $शा = ०$ व $शा' = ०$ या दोन वृत्तांच्या छेदनबिंदूमधून जाणारे वृत्त निरूपितो.

उपसाध्यः— जर $शा \equiv य^2 + र^2 + २छय + २चर + ग = ०$ हा एखादा वृत्ताचा समीकार असून

$$ठ \equiv तय + थर + न = ०$$

हा एखाद्या सरळरेषेचा समीकार असेल, तर ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता $शा + ऋठ = ०$ हा समीकार $शा = ०$ व $ठ = ०$ (अर्थात् एक वृत्त व एक सरळ रेषा) यांच्या छेदनबिंदूमधून जाणारे एक वृत्त निरूपितो.

६२. एकमेकास छेदणाऱ्या दोन वृत्तांच्या साधारण जीवेचा समीकार समजा की

$$शा \equiv य^2 + र^2 + २छ य + २च र + ग = ० \quad (१)$$

$$व \quad शा' \equiv य^2 + र^2 + २छ'य + २च'र + ग' = ० \quad (२)$$

हे दोन वृत्तांचे समीकार आहेत.

(१) मधून (२) चा वियोग करून

$$शा - शा' \equiv २(छ - छ')य + २(च - च')र + (ग - ग') = ० \quad (३)$$

आतां (१) व (२) चे समाधान करणाऱ्या य व र च्या अर्हा $शा - शा' = ०$ चे म्हणजेच

$$२(छ - छ')य + २(च - च')र + (ग - ग') = ० \quad (३)$$

चें सुद्धा समाधान करतात.

म्हणून (१) व (२) ला साधारण असणाऱ्या बिंदूंमधून जाणाऱ्या पथाचा समीकार (३) आहे. (१) व (२) ला साधारण असलेले

बिंदू दिलेल्या वृत्तांचे दोन छेदनबिंदू होत. म्हणून या ोन बदंमधन जाणाऱ्या पथाचा समीकार (३) हा आहे. आता हा य व र मधे एकघातीय असल्यामुळे त्याने निरूपिलेला पथ एक सरळ रेषा असते. म्हणून समीकार (३) दिलेल्या दोन वृत्तांचे छेदनबिंदू जोडणारी सरळ रेषा अर्थात् त्या दोन वृत्तांची साधारण जीवा निरूपितो. म्हणून साधारण जीवेचा इष्ट समीकार

२(छ–छ')य+२(च–च')र+(ग–ग')=०

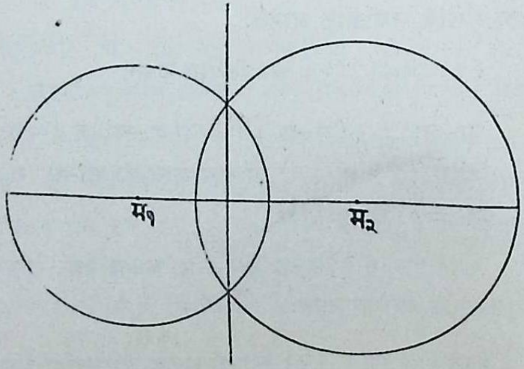
हा आहे.

दोन वृत्तांचे छेदनबिंदू वास्तविक असोत वा काल्पनिक असोत,

२(छ–छ')य+२(च–च')र+(ग–ग')=०

हा समीकार नेहमी वास्तविक रेषा निरूपितो. या रेषेला दोन वृत्तांचा मूलाक्ष (radical axis) म्हणतात.

६३. दोन वृत्तांचा मूलाक्ष किंवा साधारण जीवा वृत्तकेंद्रांना जोडणाऱ्या रेषेला लंब असते हें सिद्ध करणें.



आ. ४७

समजा की

$$य^2+र^2+2छ य+2च र+ग=0 \qquad (१)$$

$$व \quad य^2+र^2+2छ'य+2च'र+ग'=0 \qquad (२)$$

या दोन वृत्तांचीं केंद्रें अनुक्रमें $म_1$ व $म_2$ आहेत. दिलेल्या दोन वृत्तांचा मूलाक्ष किंवा साधारण जीवेचा समीकारः-

$$2(छ-छ')य+2(च-च')र+(ग-ग')=0 \qquad (३)$$

$म_1$ व $म_2$ यांचे याम अनुक्रमें (-छ,-च) व (-छ,'-च') असून त्यांना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$र+च=\frac{-च'+च}{-छ'+छ}(य+छ) \qquad (४)$$

आता रेषा (३) व (४) एकमेकांस लंब असण्याकरिता प्रतिबंध

$$-\frac{छ-छ'}{च-च'}\times\frac{च-च'}{छ-छ'}=-1$$

हा आहे व तो पाळला जातो. म्हणून दिलेल्या दोन वृत्तांची साधारण जीवा, त्यांचीं जोडणाऱ्या रेषेला लंब आहे.

उदा० १:- $य^2+र^2-क^2=0$ या वृत्ताची य कोज्याअ+रज्याअ-ल=० ही जीवा व्यास धरून काढलेल्या वृत्ताचा समीकार $य^2+र^2-क^2-2ल$ (य कोज्या अ + र ज्या अ — ल) = ० हा आहे हें दाखवा.

आता ऋ च्या सर्व अर्हांकरिता

$$य^2+र^2-क^2+ऋ\,(य\ कोज्या\ अ+र\ ज्या\ अ-ल)=0$$

हा समीकार य कोज्या अ+र ज्या अ-ल=० ही रेषा आणि $य^2+र^2-क^2=0$ हें वृत्त यांच्या छेदनबिंदूमधून जाणारें वृत्त निरूपितो. दिलेली रेषा या वृत्ताचा व्यास असल्यास वृत्ताचें केंद्र दिलेल्या रेषेवर असलें पाहिजे अर्थात् त्याच्या केंन्द्राचे याम

$\left(\frac{-\text{ऋ कोज्या अ}}{२}, \frac{-\text{ऋ ज्या अ}}{२}\right)$ दिलेल्या रेषेच्या समीकाराचें समाधान करीत असले पाहिजेत.

$$\therefore -\frac{\text{ऋ कोज्या अ}}{२}(\text{कोज्या अ}) - \frac{\text{ऋ ज्या अ}}{२}(\text{ज्या अ}) - \text{ल} = ०$$

किंवा,

$$\frac{\text{ऋ}}{२}(\text{ कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ }) + \text{ल} = ०$$

किंवा $\text{ऋ} = -२\text{ल}.$

ऋ च्या अर्हेचा आदेश करून, इष्ट वृत्ताचा समीकार :

$$\text{य}^{२} + \text{र}^{२} - \text{क}^{२} - २\text{ल}(\text{य कोज्या अ} + \text{र ज्या अ} - \text{ल}) = ०$$

उदा०२. (–१,१) हें केंद्र असलेलें एक वृत्त $\text{य}^{२} + \text{र}^{२} - ४\text{य} + ६\text{र} = ३$ या वृत्ताला बाह्यतः स्पर्श करतें. तर तें दोन्ही यामाक्षांनाहि स्पर्श करतें हें सिद्ध करा.

(–१,१) केंद्र असलेल्या वृत्ताची त्रिज्या त्र असल्यास त्याचा समीकार

$$(\text{य}+१)^{२} + (\text{र}-१)^{२} = \text{त्र}^{२} \qquad (१)$$

आता, दिलेल्या वृत्ताचा समीकार

$$\text{य}^{२} + \text{र}^{२} - ४\text{य} + ६\text{र} = ३$$

किंवा $(\text{य}-२)^{२} + (\text{र}+३)^{२} = ३ + ४ + ९$

$$= १६$$

$$= (४)^{२} \qquad (२)$$

म्हणून वृत्त (२) चें केंद्र (२, –३) आहे व त्याची त्रिज्या ४ आहे.

(१) व (२) यांच्या केंद्रांमधील अंतर

$$= \sqrt{(-१-२)^२+(१+३)^२}$$
$$= \sqrt{२५}$$
$$=५$$

परंतु, बाह्यतः स्पर्श करणाऱ्या दोन वृत्तांच्या केंद्रांमधील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या योगासमान असतें.

$$\therefore \quad त्र+४=५$$
$$\therefore \quad त्र=१$$

म्हणून इष्ट वृत्ताचा समीकारः–

$$(य+१)^२+(र-१)^२=१ \qquad (३)$$

आता हें वृत्त य–अक्षास ज्या बिंदूंत मिळतें त्यांच्या करता र = ० असतो

म्हणून

(३) मधे र=० ठेवून

$$(य+१)^२+१=१$$

किंवा $(य+१)^२=०$

$\therefore$ $य=-१, -१$

यावरून हें वृत्त य–अक्षास (–१,०),(–१,०) या दोन संपाती बिंदूंत मिळतें हें दिसून येईल. म्हणजे य–अक्ष वृत्ताची स्पर्शरेषा आहे.

तसेंच (३) मधे य=० ठेवून

$$(र-१)^२=०$$

किंवा $र=१, १$

म्हणून दिलेलें वृत्त र–अक्षास (०,१), (०,१) या दोन संपाती बिंदूंत मिळतें. म्हणून र–अक्षहि वृत्ताची स्पर्शरेषा आहे.

उदाहरणसंग्रह ८

(१) $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताच्या खालील बिंदूंच्या स्पर्शजीवांचे समीकार व ध्रुवीय काढा:-

$$(१,२),\ (-२,४),\ (३,२),\ (५,-४)$$

(२) (०,०), (६,०) आणि (०,४) या बिंदूंतून जाणाऱ्या वृत्ताचा समीकार काढा. $२य-३र=०$ ही रेषा वृत्ताला ब बिंदूंत मिळत असल्यास मब ची लांबी काढा. (मैसूर १९३८)

(३) $य-२र+१=०$ ही रेषा $य^2+र^2=२५$ या वृत्ताला स व स′ बिंदूंत छेदते. स व स′ बिंदूंशीं वृत्तास काढलेल्या स्पर्शरेषा बस व बस′ आहेत तर ब चे याम काढा. (नागपुर १९३९)

(४) $३य^2+३र^2=४$ आणि $२य^2+२र^2+६य-८र+३=०$ या वृत्तांच्या, ब बिंदूतून काढलेल्या बस आणि बस′ या स्पर्शरेषा अशा आहेत की बस : बस′ = ३ : २. तर ब चा पथ काढा. पथाचा समीकार कोणता वक्र निरूपितो. (बनारस १९४१)

(५) $(य-क)^2+र^2=२कख$ या वृत्ताला अनुलक्षून काढलेल्या एका बिंदूचा ध्रुवीय $(य-क+ख)^2+र^2=ख^2$ या वृत्ताला स्पर्श करतो. तर त्या बिंदूचा पथ काढा. (आंध्र १९३३)

(६) ब बिंदु अशा रीतीने फिरतो की त्यापासून $य^2+र^2+४य+३=०$ आणि $य^2+र^2-६य+५=०$ या वृत्तांना काढलेल्या स्पर्शरेषांच्या लांबींची निष्पत्ति १ : २ आहे तर ब चा पथ एक वृत्त आहे हें सिद्ध करा. त्याची त्रिज्या व केंद्राचे याम काढा. (नागपुर १९३२)

(७) एखाद्या वृत्ताला काढलेल्या भ च्या ध्रुवीयापासून ब चें अंतर आणि त्याच वृत्ताला काढलेल्या ब च्या ध्रुवीयापासून भ चें अंतर यांचें प्रमाण हें त्या बिंदूंच्या वृत्तकेंद्रापासून असलेल्या अंतरांच्या प्रमाणाएवढें असतें हें सिद्ध करा. (नागपुर १९४०)

(८) $४(य^२+र^२)-८(य-२र)+१९=०$ या वृत्ताचें केंद्र आणि त्रिज्या काढा. मूलबिंदूपासून वृत्तास काढलेल्या स्पर्शरेषांची लांबी काढा. (त्रावणकोर १९४०)

(९) $य^२+र^२+२य+४र=६$ आणि $य^२+र^२=४$ या वृत्तांच्या छेदनबिंदूंशीं पहिल्या वृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु काढा. (नागपूर १९२८)

(१०) $य^२+र^२=१२$ आणि $य^२+र^२-५य+३र-२=०$ या वृत्तांच्या छेदनबिंदूशीं पहिल्या वृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु काढा. (नागपूर १९३९)

(११) $य^२+र^२=क^२$ या वृत्ताची एक चल स्पर्शरेषा यामाक्षांना ब आणि भ बिंदूंत छेदते. तर बभ च्या मध्यबिंदूचा पथ $४य^२र^२=क^२(य^२+र^२)$ आहे हें दाखवा. (आंध्र १९३७)

(१२) ब बिंदूपासून $य^२+र^२=क^२$ या वृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषांची स्पर्शजीवा वृत्तकेंद्राशीं लंबकोण आपातित करीत असल्यास ब च्या पथाचा समीकार काढा. (मद्रास १९३८)

(१३) खालील वृत्तयुग्में एकमेकांस स्पर्श करतात हें दाखवून त्यांचा स्पर्शबिंदु काढा:-

(१) $य^२+र^२=४$; $य^२+र^२-६य-८र+१६=०$ (आंध्र १९४२)

(२) $य^२+र^२+२य-८र+८=०$;
$य^२+र^२+१०य-२र+२२=०$, (नागपूर १९३०)

(१४) $(य-क)^२+र^२=क^२$ आणि $य^२+(र-ख)^२=ख^२$ या वृत्तांच्या साधारण जीवेची लांबी काढा. (नागपूर १९३१)

(१५) $य-२र=१$ ही रेषा $६य^२-यर-१२र^२=०$ या वक्राला ब आणि भ बिंदूंत मिळते. तर बभ व्यास धरून काढलेल्या वृत्ताचा समीकार

$$१०(य^२+र^२)+२६य+२३र-६=०$$

हा आहे हें दाखवा. (मैसूर १९३७)

(१६) $य^२+र^२-२य=०$ या वृत्ताला मूलबिंदूंतून एक जीवा काढली. तर ही जीवा व्यास धरून काढलेल्या वृत्ताच्या केंद्राचा पथ दिलेल्या वृत्ताच्या केंद्रांतून जाणारें एक वृत्त आहे हें दाखवा.

(नागपुर १९४४)

(१७) एखाद्या वृत्ताच्या जीवा एका स्थिर बिंदूंतून जात असल्यास त्यांच्या मध्यबिंदूंचा पथ एक वृत्त असतें हें सिद्ध करा.

(कलकत्ता १९३५)

(१८) मूलबिंदूपासून $य^२+र^२+१०(य+र)+४०=०$ या वृत्ताला काढतां येणाऱ्या दोन स्पर्शरेषांमधील कोण काढा.

(मुंबई १९२४)

(१९) $य^२+र^२+२य+३र+१=०$ आणि
$य^२+र^२+४य+३र+२=०$ या वृत्तांची साधारण जीवा व्यास असलेल्या वृत्ताचा समीकार काढा.

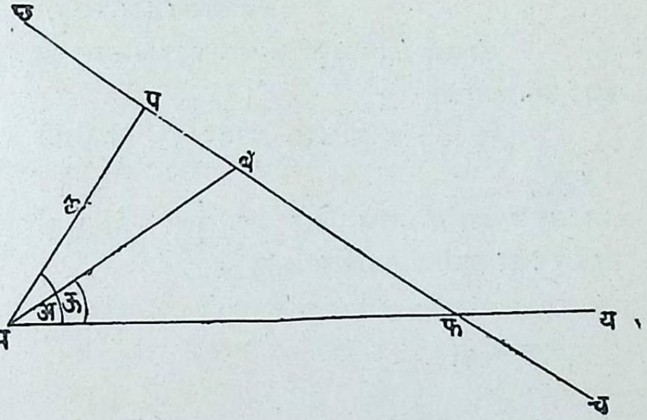
(२०) $तय+थर+१=०$ ही रेषा $कय^२+२जयर+खर^२=०$ या रेषायुग्माला ब आणि भ बिंदूंत छेदते. तर बभ व्यास धरून काढलेल्या वृत्ताचा समीकार

$$[(य^२+र^२)(कथ^२-२जतथ+खत^२)+२य(खत-जथ)$$
$$+२र(कथ-जत)+(क+ख)]=०$$

हा आहे हें दाखवा. (त्रावणकोर १९४१)

सरळ रेषा आणि वृत्त यांचे ध्रुवीय समीकार.

६४. **एखाद्या सरळ रेषेचा सामान्य समीकार ध्रुवीय यामांमध्यें काढणें.**



आ. ४८

म हा ध्रुव, मय ही आदिरेषा, चछ या दिलेल्या रेषेवर ध्रुवापासून काढलेल्या लंबाची लांबी 'ल', आणि मप या लंबाने आदिरेषेशीं केलेला कोण अ आहे असें समजा.

समजा की चछ रेषेवरील ब या कोणत्याहि बिंदूचे धावीयाम (त्र, ऊ) आहेत.

आता, त्र, ऊ, ल आणि अ यांमधील जो संबंध चछ रेषेवरील ब बिंदूच्या सर्व स्थानांकरिता सत्य राहील तो त्या रेषेचा ध्रुवीय समीकार होईल.

मपब या लंबकोण त्रिकोणावरून

$\therefore$ मप = मब . कोज्या बमप

पण, $\angle$ बमप = अ − ऊ

मप = ल

व $\quad$ मब = त्र

$\therefore$ $\quad$ ल = त्र कोज्या (अ − ऊ)

= त्र कोज्या (ऊ − अ),

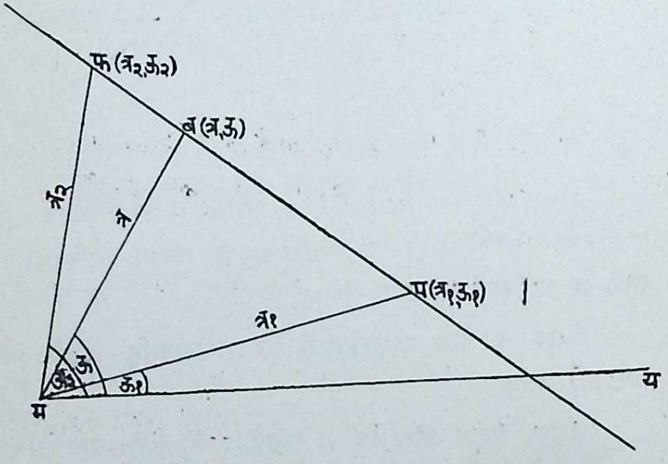
$\therefore$ कोज्या (अ − ऊ) = कोज्या (ऊ − अ)

म्हणून इष्ट समीकार

ल = त्र कोज्या (ऊ − अ)

हा होय.

६५. दोन बिंदूंचे ध्रुवीय याम दिले असल्यास त्यांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेचा ध्रुवीय समीकार काढणें.



आ. ४९

समजा की प व फ या दिलेल्या दोन बिंदुंचे ध्रुवीय याम ($त्र_1$, $ऊ_1$) आणि ($त्र_2$, $ऊ_2$) आहेत; आणि प व फ यांना जोडणाऱ्या रेषेवरील ब या कोणत्याहि बिंदूचे याम (त्र, ऊ) आहेत.

आता, आकृतीवरून,

$$\triangle \text{मपफ} = \triangle \text{मपब} + \text{मबफ} \triangle$$

किंवा $\frac{1}{2}$ त्र$_1$त्र$_2$ ज्या (ऊ$_2$ − ऊ$_1$)

$= \frac{1}{2}$ त्र$_1$त्र ज्या (ऊ − ऊ$_1$) + $\frac{1}{2}$ त्रत्र$_2$ ज्या (ऊ$_2$ − ऊ)

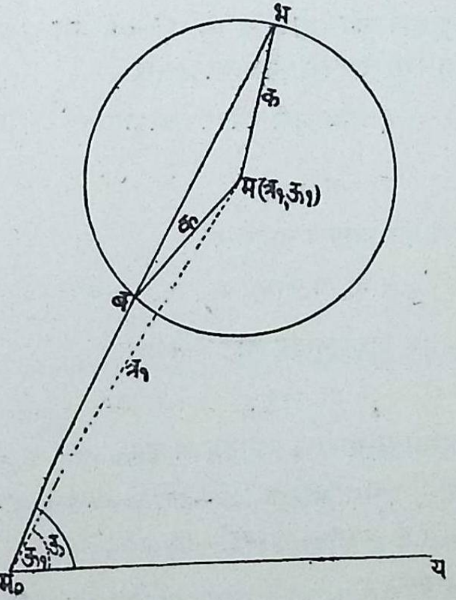
यांस $\frac{1}{2}$ त्र$_1$त्र$_2$त्र ने साद्यंत भागून,

$$\frac{\text{ज्या (ऊ}_2 - \text{ऊ}_1)}{\text{त्र}} = \frac{\text{ज्या (ऊ} - \text{ऊ}_1)}{\text{त्र}_2} + \frac{\text{ज्या (ऊ}_2 - \text{ऊ})}{\text{त्र}_1}$$

किंवा $$\frac{\text{ज्या (ऊ} - \text{ऊ}_1)}{\text{त्र}_2} + \frac{\text{ज्या (ऊ} - \text{ऊ}_1)}{\text{त्र}} + \frac{\text{ज्या (ऊ}_2 - \text{ऊ})}{\text{त्र}_1} = ०$$

हा रेषेचा इष्ट समीकार होय.

३३ एखाद्या वृत्ताचा ध्रुवीय समीकार सामान्यतम रूपांत काढणें.



आ. ५०

समजा की $म_0$ हा ध्रुव व $म_0$ य ही आदिरेषा यांना अनुलक्षून वृत्तकेंद्र म चे याम ($त्र_1$, $ऊ_1$) असून वृत्ताची त्रिज्या क आहे.

आदिरेषेशीं ऊ कोण करणारी म० बिंदुंतून काढलेली सदिश त्रिज्या वृत्ताला ब आणि भ बिंदूत मिळते. ब आणि भ वृत्तावर असल्याने त्यांचे धावीयाम (त्र, ऊ) घेतां येतील.

आता, त्रिकोणमितीने

$$मब^2 = म_0म^2 + म_1ब^2 + म_1ब^2 - २म_0 म . म_0 ब \text{ कोज्या } मम_0 ब$$

$$\text{किंवा } क^2 = त्र_1^2 + त्र^2 - २ त्र_1 \text{ कोज्या } (ऊ - ऊ_1)$$

$$\text{किंवा } त्र^2 - २ त्र_1 त्र \text{ कोज्या } (ऊ - ऊ_1) + त्र_1^2 - क^2 = ०$$

हा वृत्ताचा इष्ट ध्रुवीय समीकार होय.

६६.१ $त्र^2 - २ त्र_1 त्र \text{कोज्या} (ऊ - ऊ_1) + त्र_1^2 - क^2$ या ध्रुवी ययामांमधील सामान्य समीकाराचे विशिष्ट प्रकार :—

प्रकार १ :- वृत्तकेंद्र आदि रेषेवर असल्यास

$$ऊ_1 = ०$$

म्हणून वृत्ताचा सामान्य समीकार

$$त्र^2 - २ त्र_1 त्र \text{ कोज्या } ऊ + त्र_1^2 - क^2 = ०$$

प्रकार २ :- वृत्त ध्रुवांतून जात असल्यास

$$त्र_1 = क$$

म्हणून वृत्ताच्या सामान्य समीकाराचें रूप

$$त्र^2 - २ कत्र \text{ कोज्या } (ऊ - ऊ_1) = ०$$

$$\text{किंवा } त्र = २ क \text{ कोज्या } (ऊ - ऊ_1)$$

प्रकार ३ :- वृत्त ध्रुवांतून जात असून वृत्तकेंद्र आदिरेषेवर असल्यास

$$त्र_1 = क \text{ आणि } ऊ_1 = ०$$

म्हणून सामान्य समीकार

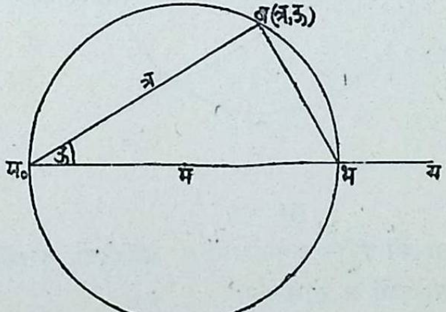
$$त्र^{2} - २ कत्र \text{ कोज्या } ऊ = ०$$

किंवा $$त्र = २ क \text{ कोज्या } ऊ$$

या रूपांत येतो.

पुढील अनुच्छेदांत दाखविल्याप्रमाणें प्रकार २ व ३ आकृतीवरून प्रत्यक्ष रीतीने मिळवितां येतात.

६७. वृत्त ध्रुवांतून जात असून त्याचें केंद्र आदिरेषेवर असल्यास वृत्ताचा ध्रुवीय समीकार काढणें.



आ. ५१

ध्रुव म० परिघावर असून मय ही आदिरेषा केंद्र म मधून जाऊन वृत्ताला भ बिंदूंत छेदते.

म्हणून म०भ वृत्ताचा एक व्यास होय. समजा की वृत्ताची त्रिज्या क असून परिघावरील ब या कोणत्याहि बिंदूचे याम (त्र, ऊ) आहेत.

म्हणून ∠ म०बभ = अर्धवृत्तांतील कोण

= लंबकोण

∴ म०ब = म०भ कोज्या भम०ब

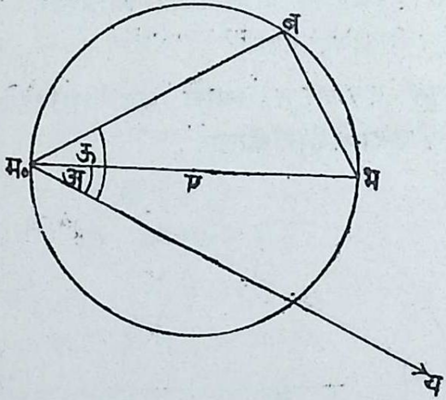
पण, म०ब = त्र

म०भ = २क

आणि ∠ भम०ब = ऊ

∠ त्र = २ ककोज्या ऊ.

हा इष्ट समीकार होय.



आ. ५२

समजा की वरील अनुच्छेदांतील आदिरेषा वृत्तकेंद्रातून न जातां म०भ या व्यासाशीं अ कोण करते.

म्हणून ∠ भम०ब = ऊ — अ

आणि वृत्ताचा समीकार

त्र = २ क कोज्या (ऊ — अ)

म्हणून, ध्रुव ज्याच्या परिघावर असतो आणि ध्रुव व वृत्तकेंद्र जोडणारी त्रिज्या आदिरेषेशीं अ कोण करते अशा क त्रिज्या असणाऱ्या वृत्ताचा ध्रुवीय समीकार

त्र = २ क कोज्या (ऊ – अ)

हा आहे.

उदाहरणें

(१) $ल = त्र$ कोज्या $(ऊ - अ)$ आणि $ल' = त्र$ कोज्या $\left(ऊ + \frac{प्या}{२} - अ\right)$

या रेषा एकमेकांस लंब आहेत हें दाखवा.

(नागपूर १९३९)

(२) $त्र \sqrt{३} = २\, क$ कोज्या ऊ या वृत्तावरील ज्या बिंदूचा सदिश कोण $\frac{प्या}{६}$ आहे त्या बिंदूंतून जाणाऱ्या वृत्ताच्या त्रिज्येचा ध्रुवीय समीकार $क = २\, त्र$ कोज्या $\left(ऊ + \frac{प्या}{६}\right)$ आहे हें दाखवा.

(नागपूर १९३०)

प्रकरण ६ वें

शंकुच्छेद आणि एकेंद्र

६९ **परिभाषा**

शंकुच्छेद (Conic Section) किंवा **शांकव** (Conic) :—

ज्या बिंदूचें एका स्थिर बिंदुपासूनचें अंतर आणि एका स्थिर सरळ रेषेपासूनचें लंबांतर यांची निष्पत्ति नेहमी अचल असते अशा बिंदूच्या पथास शंकुच्छेद किंवा शांकव म्हणतात.

स्थिर असलेल्या बिंदूस **'नाभि'** (focus) आणि स्थिर असलेल्या रेषेला **'नियता'** (directrix) म्हणतात.

नाभि बहुधा 'न' ने दर्शविली जाते.

उत्केंद्रता :— वरील परिभाषेंतील अचल निष्पत्तीला **"शांकवाची उत्केंद्रता"** (eccentricity) म्हणतात व ती 'उ' ने दर्शवितात.

अक्ष :— नियतेला लंब असणाऱ्या आणि नाभींतून जाणाऱ्या सरळ रेषेला शांकवाचा अक्ष म्हणतात.

उत्केंद्रता उ $\lesseqgtr$ १ असेल तदनुसार शांकवाचे तीन भिन्न प्रकार असतात.

उ $<$ १ असेल तर निर्माण होणाऱ्या शांकवास **'ऊनेंद्र'** (ellipse) म्हणतात.

उ$=$१ असेल तर निर्माण होणाऱ्या शांकवास **'एकेंद्र'** (parabola) म्हणतात.

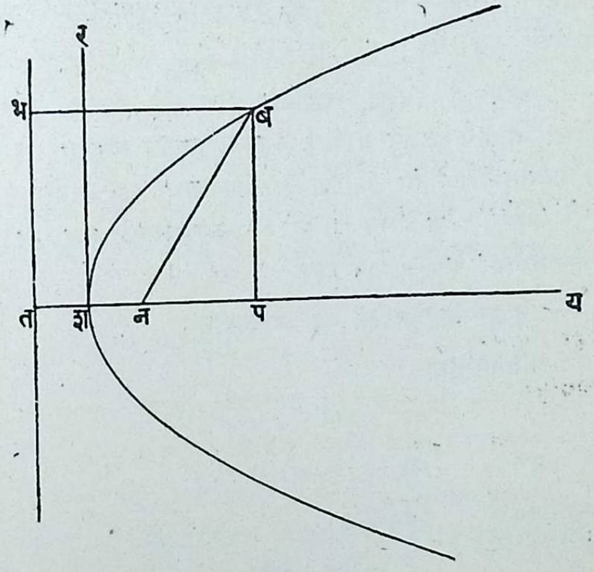
उ $>$ १ असेल तर निर्माण होणाऱ्या शांकवास **'अधींद्र'** (hyperbola) म्हणतात.

हे सर्व वक्र शंकूचे (cone) निरनिराळया प्रकारें छेद करून निर्माण होतात; म्हणून त्यांना 'शंकुच्छेद' असें म्हणतात.

या प्रकरणांत एकेंद्राचा समीकार आणि त्याच्या साह्याने किंवा अन्य रीतीने त्या शांकवाचे प्रमुख गुणधर्म काढले आहे.

७०. एकेंद्राचा समीकार

न बिंदु ही नाभि असून तभ रेषा ही नियता आहे असें समजा.



आ. ५३

नियतेला नत लंब काढा. तन ला श मधे दुभागा. व ती न च्या पलिकडे य पर्यंत वाढवा. तेव्हां परिभाषेवरून, शय रेषा एकेंद्राचा अक्ष होईल.

आता, एकेंद्राकरिता उ = १ आणि नश = शत असल्यामुळे श हा बिंदु वक्रावर राहील हें उघड आहे. 'श' ला एकेंद्राचा

'शिरोबिंदु' म्हणतात.

श मूलबिंदु, शय य–अक्ष आणि शय ला लंब असणारी शर ही रेषा र–अक्ष घ्या.

समजा की, तश = शन = क

आता आपला उद्देश ज्या बिंदूचें न पासूनचें अंतर तम या नियतेपासूनच्या लंबांतरासमान असतें अशा बिंदूच्या पथाचा समीकार काढणें हा आहे. समजा ब हा पथावरील एक बिंदु असून बभ नियतेवर लंब आहे.

समजा ब बिंदूचें धावीयाम (य, र) आहेत. वर विशद केलेला प्रतिबंध पाळून ब बिंदु फिरतो तेव्हा त्याच्या य आणि र या यामांमधील संबंध हा त्याच्या बिंदुपथाचा इष्ट समीकार होईल.

आता न चे याम (क, ०) असल्यामुळे तभ या नियतेचा समीकार य+क=० हा आहे.

बभ हा नियतेवरील लंब काढल्यास

प्रतिबंधानुसार,

$$नब^२ = बभ^२$$

पण, $$नब^२ = (य-क)^२ + र^२$$

आकृतीवरून $$बभ = तप$$

$$= तश + शप$$

$$= क + य$$

म्हणून $$बभ^२ = (य+क)^२$$

$$\therefore (य-क)^२ + र^२ = (य+क)^२$$

किंवा $$र^२ = ४ कय$$

हा एकेंद्राचा इष्ट समीकार होय.

उपसाध्य :—

$$र^2 = ४कय$$

हा समीकार, रैखिकीय दृष्टचा,

$$बप^2 = ४शन . शप.$$

या प्रमेयासमान आहे.

७१. $र^2 = ४क.य$ या वक्राचें अनुरेखण करणें.

कोणत्याहि वास्तविक राशीचा वर्ग धन असल्यामुळे, वक्राच्या समीकारांत य ला ऋण अर्हा दिल्यास र च्या संवादी अर्हा काल्पनिक होतात.

म्हणून वर दिलेल्या समीकाराच्या पथाचा विचार करतांना य च्या केवळ धन अर्हाच ग्राह्य धराव्या लागतात. यावरून समीकाराने निरूपिलेला वक्र पूर्णत: र—अक्षाच्या उजवीकडे रहातो हें दिसून येईल.

आता वक्राच्या समीकारांत

$$य = ० \text{ ठेवल्यास, } र^2 = ०$$

$$\therefore \quad र = ०, \qquad र = ०$$

म्हणून र – अक्ष अर्थात् य = ० ही रेषा वक्राला (०,०),(०,०) या दोन संपाती बिंदूंत मिळते. यावरून र – अक्ष वक्राला शिरोबिंदु 'श' शीं स्पर्श करतो हें स्पष्ट होतें.

$$र = ० \quad \text{असल्यास} \quad य = ०.$$

यावरून य—अक्ष वक्राला केवळ (०,०) या एकच बिंदूंत म्हणजे शिरोबिंदूंत मिळतो.

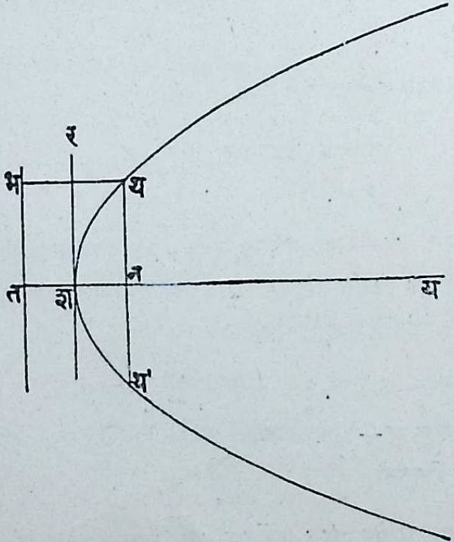
य च्या प्रत्येक धन अर्हेनुसार, र च्या दोन वास्तविक अर्हा मिळतात. त्या समान महत्तेच्या पण विरूद्ध चिन्हांच्या असतात.

यावरून असें दिसून येतें की (य', र') बिंदु वक्रावर असल्यास (य,' – र') हा बिंदूहि वक्रावर असतो. अन्य शब्दांत, वक्राचा हा गुणधर्म "वक्र य–अक्षाभोवती संमितीय आहे " असा लिहितां येईल.

य ची महत्ता जसजशी वाढत जाते तसतसा र हि संख्येने वाढत जातो; आणि जेव्हा य अनंताइतका मोठा होतो. तेव्हा रहि अनंताइतका मोठा होतो. म्हणून य च्या अनेक अर्हा आणि र च्या संवादी अर्हा घेऊन हा वक्र रेखिल्यास त्याचें रूप मागील अनुच्छेदांत काढलेल्या आकृतींत दाखविल्याप्रमाणे येतें हें दिसून येईल.

य–अक्षाच्या वर आणि खाली असणाऱ्या वक्राच्या दोन शाखा कोठेच मिळत नाहीत. त्यांची लांबी अनंत असते.

७२. **द्विगुण कोटि** :– $र^2 = ४$ कय या एकेंद्रावरील ब (य,'–र') आणि ब' (य,' र') या दोन संमितीय बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला '**द्विगुण कोटि**' (double ordinate) म्हणतात.



उत्थानः– कोणत्याहि शांकवांत त्याच्या न या नाभींतून काढलेल्या थनथ' या द्विगुणकोटीला शांकवाचें 'उत्थान' (latus rectum) म्हणतात. एकेंद्राच्या बाबतींत, त्याच्या परिभाषेवरून

नथ = थ चें

नियतेपासून अंतर

= थभ

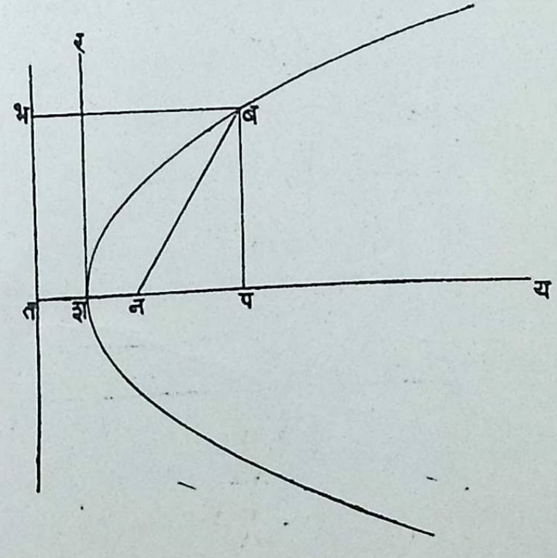
= नत

= २क

∴ उत्थान = ४क.

४ क या राशीला वक्राचा प्रमुख **प्राचल** (parameter) असेंहि म्हणतात. तो माहीत असल्यास एकेंद्राचा समीकार ताबडतोब $र^2 = ४ कय$ या प्रमाप (standard) रूपांत लिहितां येतो.

७३. एखाद्या बिंदूंचें नाभ्यंतर :–



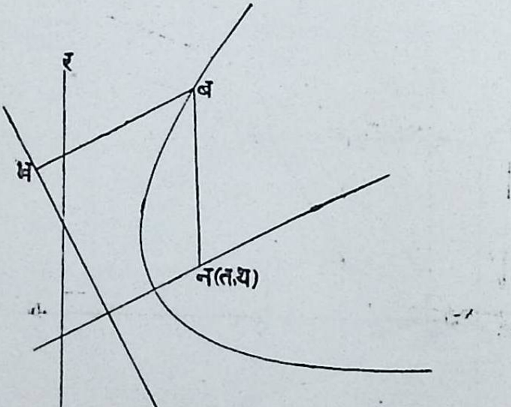
एकेंद्रांवरील ब या कोणत्याहि बिंदूच्या न या नाभीपासूनच्या नब या अंतरास त्या बिंदूचें नाभ्यंतर (focal distance) म्हणतात.

ब चे याम (य, र) असल्यास

$$
\begin{aligned}
\text{नब} &= \text{भब} \\
&= \text{तप} \\
&= \text{तश} + \text{शप} \\
&= \text{क} + \text{य}
\end{aligned}
$$

म्हणून $\text{र}^2 = ४\,\text{कय}$ या एकेंद्रावरील (य, र) या बिंदूचें नाभ्यंतर (क+य) असतें.

७४. कोणत्याहि आयत अक्ष द्वयाला अनुलक्षून एकेंद्राचा समीकार पुढे दिल्याप्रमाणे काढतां येतो.



आ. ५६

समजा की नियतेचा समीकार कय+खर+ग=० असून न या नाभीचे यास (त, थ) आहेत. एकेंद्रावरील ब बिंदूचे धावीयाम (य, र) असल्यास,

$$नब^{2}=(य-त)^{2}+(र-थ)^{2}$$

$$कय+खर+ग=०.$$

या नियतेवर ब पासून काढलेल्या बभ ह्या लंबाच्या लांबीचा वर्ग

$$=\frac{(कय+ख.र+ग)^{2}}{क^{2}+ख^{2}}$$

आता दिलेला वक्र एकेंद्र असल्यामुळे

$$नब^{2}=बभ^{2}$$

म्हणून एकेंद्राचा इष्ट समीकार

$$(य-त)^{2}+(र-थ)^{2}=\frac{(कय+खर+ग)^{2}}{क^{2}+ख^{2}}$$

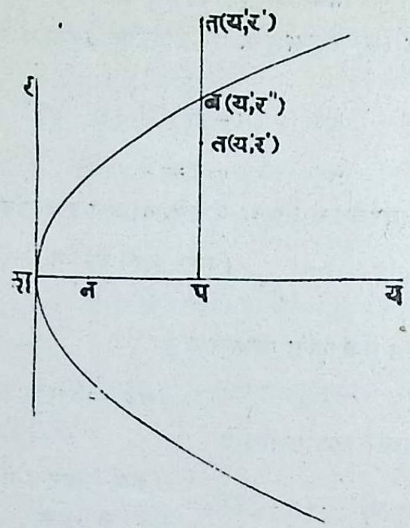
किंवा, $(क^{2}+ख^{2})[(य-त)^{2}+(र-थ^{2})]=(कय+खर+ग)^{2}$

७५. $र'^{2}-४$ कय' हो राशी ऋण, शून्य किंवा धन असेल तदनुसार (य' र') हा बिंदु $र^{2}=४$ कय या एकेंद्राच्या आंत, वर किंवा बाहेर असतो.

समजा त (य', र') हा दिलेला बिंदु आहे. तप ही कोटि $र^{2}=४$ कय या एकेंद्राला ब बिंदूंत छेदते. समजा (य', र'') हे ब चे याम आहेत.

आता ब (य', र'') हा बिंदु $र^{2}=४$कय या एकेंद्रावर असल्यामुळे $र'^{2}=४$ कय'

आकृतीवरून, तप $\lesseqgtr$ बप असेल तदनुसार त बिंदु एकेंद्राच्या आंत, वर किंवा बाहेर राहील.



आ. ५७

म्हणून र' $\lesseqgtr$ र'' असेल

किंवा र'^{२} $\lesseqgtr$ र''^{२}

,, र'^{२} $\lesseqgtr$ ४ कय' (∵ र''^{२} = ४ कय') असेल

,, र'^{२} ४ कय' $\lesseqgtr$ ० असेल

तदनुसार त बिंदु एकेंद्राच्या, वर किंवा बाहेर राहील.

उदाहरणसंग्रह ९

(१) पुढे दिलेली नाभि व नियता असणाऱ्या एकेंद्राचा समीकार काढा :—

(१) $(-\frac{३}{४}, ०)$ ही नाभि आणि $४य + १३ = ०$ ही नियता.

(२) $(-२, -\frac{५}{६})$ ही नाभि आणि $६र + १३ = ०$ ही नियता.

(३) $(१, १)$ ही नाभि आणि $३य + ४र = १$ ही नियता.

(४) $(क, ख)$ ही नाभि आणि $\frac{य}{क} + \frac{र}{ख} = १$ ही नियता.

(२) एकेंद्राचा अक्ष व नियता अनुक्रमें य–अक्ष व र–अक्ष घेतल्यास त्याचा समीकार

$$र^२ = ४ क (य - क)$$

आहे हें सिद्ध करा.

(३) $र^२ = -३य + ४$ या एकेंद्राच्या उत्थानाची लांबी ३ आहे हें दाखवा.

(४) (१) $र^२ = २ य$ आणि (२) $य^२ = २र$ हें एकेंद्र काढून $(१, २)$ हा बिंदु त्यांच्या आंत आहे की बाहेर आहे तें सांगा.

(५) $४र^२ + १२य - २०र + ६७ = ०$ या एकेंद्राचा शिरोबिंदु, अक्ष, नाभि आणि उत्थान काढा.

(६) $र^२ = ४क य$ या एकेंद्राच्या शिरोबिंदूतून काढलेल्या सर्व जीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ $र^२ = २कय$ हा एकेंद्र आहे हें सिद्ध करा.

(७) $३र^२ = ४ य$ या एकेंद्राचें उत्थान, व नाभीचे याम काढून या

एकेंद्राला २य=३र ही रेषा ज्या बिंदूंत छेदते त्या बिंदूंचे याम काढा. (कलकत्ता १९३५)

(८) ब बिंदु अशा प्रतिबंधाने फिरतो की त्यापासून एका स्थिर वृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषेची लांबी एका स्थिर रेषेपासूनच्या ब च्या अंतरासमान आहे, तर ब चा पथ एक एकेंद्र आहे हें सिद्ध करा. (नागपुर १९४२)

(९) एकेंद्रावरील ब हा कोणताहि बिंदु त्याच्या श या शिरोबिंदूला जोडला. शब ला काढलेला बभ हा लंब वक्राच्या अक्षाला भ बिंदूंत मिळतो. तर बभचा अक्षावरील विक्षेप नेहमी एकेंद्राच्या उत्थानासमान असतो हें सिद्ध करा.

(१०) $र^2=४कय$ या केंद्राची एक द्विगुण कोटि ८क आहे. तर तिचीं दोन टोकें शिरोबिंदूला जोडणाऱ्या रेषा एकमेकांस लंब आहेत हें सिद्ध करा.

---

७६. र=धय+ग या सरळरेषेचें आणि $र^2=४कय$ या एकेंद्राचे छेदनबिंदू.

$$र=धय+ग \quad (१)$$

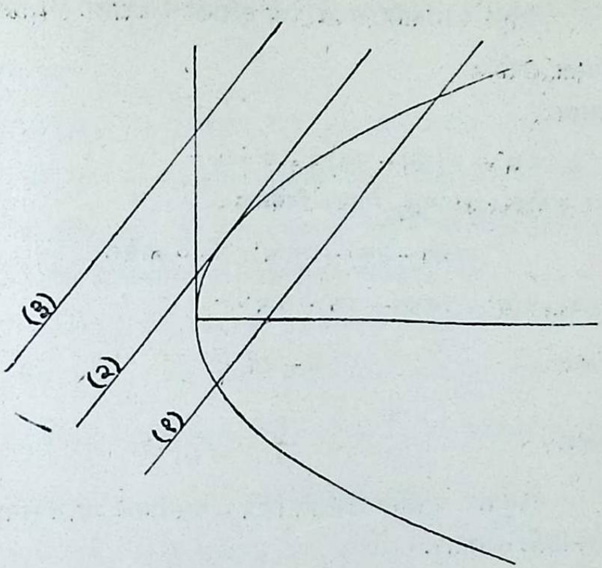
ही रेषा

$$र^2=४कय \quad (२)$$

एकेंद्राला ज्या बिंदूंत छेदते त्या बिंदूंचें याम दोन्ही समीकारांचे समाधान करतात म्हणून हे समीकार य व र करिता सोडवून ते याम मिळतात.

(१) व (२) मधून र चें निरसन करून

$$(धय+ग)^2=४ कय$$



आ. ५८

किंवा $ध^2य^2+२(धग-२क)\,य+ग^2=०$ (३)

हा समीकार य मधे द्विघातीय असल्यामुळे य च्या दोन अर्हा मिळतात. समजा त्या $य_१$ व $य_२$ ह्या आहेत. या अर्हा (१) व (२) च्या छेदनबिंदूंचे भुजयाम होत.

आता समीकार (१) हा य व र मधील रेखीय समीकार असल्यामुळे य च्या प्रत्येक अर्हेशीं र ची केवळ एकच अर्हा संवादी असते, आणि व्यत्यासतःहि म्हणून समीकार (३) वरून मिळणाऱ्या य च्या दोन अर्हांशीं संवादी असणाऱ्या र च्या दोन अर्हा मिळतात. या (१) व (२) यांनी निरूपिलेल्या वक्रांच्या छेदनबिंदूंचे कोटियाम होत. म्हणून समीकार (१) ने दिलेल्या सरळरेषा (१) ने दिलेल्या एकेंद्राला केवळ दोनच बिंदूंत छेदते.

म्हणून कोणतीहि सरळ रेषा एखाद्या एकेंद्राला सामान्यतः दोन बिंदूंत छेदते.

आता

$$ध^2य^2 + २(धग - २क)य + ग^2 = ० \qquad (३)$$

या समीकाराचीं मुळे, त्याचा विवेचक

$$४(धग - २क)^2 - ४ध^2ग^2 \gtreqless ० \text{ असेल}$$

किंवा $ध^2ग^2 - ४कधग + ४क^2 - ध^2ग^2 \gtreqless ०$,,

किंवा $क - धग \gtreqless ०$,,

किंवा $\frac{क}{ध} \gtreqless ग$,,

तदनुसार वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक आणि समान किंवा काल्पनिक असतात.

$\therefore$ $र = धय + ग$ ही रेषा $र^2 = ४कय$ या एकेंद्रास ज्या दोन बिंदूंत छेदते ते बिंदू

$\frac{क}{ध} > ग$ असेल तर वास्तविक आणि भिन्न

$\frac{क}{ध} =$,, ,, ,, ,, ,, संपाती

$\frac{क}{ध} <$,, ,, ,, ,, ,, काल्पनिक

असतात.

आकृतींत (१), (२), (३) या अंकांनी दर्शविलेल्या रेषांचा ध एकच आहे अर्थात् त्या कमेकांस समांतर आहेत.

सरळ रेषा (१) एकेंद्रास दोन वास्तविक व भिन्न बिंदूंत छेदते.

तो $ग < \frac{क}{ध}$ या प्रतिबंधाचे समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे.

सरळरेषा (२) एकेंद्राला दोन वास्तविक आणि संपाती बिंदूंत छेदते. ती $ग = \frac{क}{ध}$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे. ही रेषा एकेंद्राला दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत मिळत असल्यामुळे ती एकेंद्राची स्पर्शरेषा आहे.

सरळरेषा (३) एकेंद्राला कोणत्याच वास्तविक बिंदूंत छेदत नाहीं. हेंच विधान अन्य शब्दांत मांडावयाचें म्हणजे ही रेषा एकेंद्राला दोन काल्पनिक बिंदूंत छेदते. ती $ग > \frac{क}{ध}$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे.

७७. ध च्या सर्व अर्हां करिता, $र = धय + ग$ ही सरळ रेषा $र = ४कय$ या एकेंद्राची स्पर्शरेषा असण्याकरिता प्रतिबंध.

जर $ग = \frac{क}{ध}$ असेल तर

$र = धय + ग$ ही रेषा $र^2 = ४कय$

या एकेंद्रास दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत छेदते हें मागील अनुच्छेदांत आपण पाहिलेंच आहे.

आता कोणतीहि सरळ रेषा एखाद्या वक्रास दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत मिळत असेल तर परिभाषेवरून ती वक्राची स्पर्शरेषा होते.

म्हणून ध ची कोणतीहि अर्हा असली तरी $र = धय + ग$ ही $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राची स्पर्शरेषा होण्याकरितां $ग = \frac{क}{ध}$ असावयास पाहिजे.

म्हणजेच ध ची कोणतीहि अर्हा असली तरी $र = धय + \frac{क}{ध}$ ही रेषा नेहमी $र^२ = ४कय$ या एकेंद्राची स्पर्शरेषा असते.

७८ $र = धय + ग$ या सरळरेषेवर $र^२ = ४कय$ या एकेंद्राने खंडित केलेल्या जीवेची लांबी काढणें.

५२·२ या अनुच्छेदांत दिल्याप्रमाणे

$$र = धय + ग \text{ ही रेषा } र^२ = ४ कय$$

या एकेंद्राला ज्या बिंदूंत छेदते त्या प $(य_१, र_१)$ व फ $(य_२, र_२)$ या दोन बिंदूंचे भुज $य_१$ व $य_२$,

$$ध^२ य^२ + २ (धग - २ क) य + ग^२ = ०$$

या द्विघात समीकाराचीं मुळें आहेत.

म्हणून बैजिकीने

$$य_१ + य_२ = - \frac{२ (धग - २ क)}{ध^२}$$

व $$य_१ य_२ = \frac{ग^२}{ध^२}$$

आता $$(य_१ - य_२)^२ = (य_१ + य_२)^२ - ४ य_१ य_२$$

$$= \frac{४ (धग - २ क)^२}{ध^४} - \frac{४ ग^२}{ध^२}$$

$$= \frac{१६ क (क - धग)}{ध^४}$$

$$\therefore \quad य_१ - य_२ = \pm \frac{४}{ध^२} \sqrt{क (क - धग)}$$

प व फ बिंदू $र = धय + ग$ या रेषेवर असल्यामुळे

$$र_१ = धय_१ + ग$$

$$र_२ = धय_२ + ग$$

म्हणून, वियोग करून

$$र_1 - र_2 = ध\,(य_1 - य_2)$$

किंवा $(र_1 - र_2)^2 = ध^2\,(य_1 - य_2)^2$

$\therefore$ पफ जीवेची इष्ट लांबी $= \sqrt{(य_1 - य_2)^2 + (र_1 - र_2)^2}$

$$= \sqrt{1 + ध^2}\,(य_1 - य_2)$$

$$= \sqrt{1 + ध^2}\,\frac{4}{ध^2}\,\sqrt{क\,(क - धग}$$

$$= \frac{4}{ध^2}\,\sqrt{1 + ध^2}\,\sqrt{क\,(क - धग)}$$

येथे पफ ची केवळ लांबीच काढावयाची असल्यामुळे $(य_1 - य_2)$ ची धन अर्हा घेतली आहे.

उपासाध्यः– जेव्हा दिलेल्या रेषेवर एकेंद्राने खंडित केलेल्या जीवेची लांबी शून्य होते, तेव्हा ती रेषा एकेंद्राची स्पर्शरेषा होते.

अशा वेळीं वरील फल शून्य होते.

अर्थात् $\sqrt{1 + ध^2}\,\sqrt{क\,(क - धग)} = 0$

परंतु $ध \neq 0$ व $क \neq 0$

$\therefore$ $क - धग = 0$ असावयास पाहिजे

अर्थात् $ग = \frac{क}{ध}$ " "

म्हणून $र = धय + \frac{क}{ध}$ ही, $र^2 = 4\,कय$ या एकेंद्राची स्पर्शरेषा असते.

७९. $\text{र}^2 = \text{४ कय}$ या एकेंद्राच्या (य', र') या बिंदूशी असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार.

समजा प (य', र') व फ (य'', र'') हे दिलेल्या एकेंद्रावरील संनिध असलेले दोन बिंदू आहेत.

पफ रेषेचा समीकार

$$\text{र} - \text{र}' = \frac{\text{र}'' - \text{र}'}{\text{य}'' - \text{य}'} (\text{य} - \text{य}') \qquad (१)$$

प व फ हे दोन्ही एकेंद्रावर असल्यामुळें

$$\text{र}'^2 = \text{४ क य}'$$

व

$$\text{र}''^2 = \text{४ क य}''$$

म्हणून वियोग करून

$$\text{र}''^2 - \text{र}'^2 = \text{४ क} (\text{य}'' - \text{य}')$$

अर्थात् $(\text{र}'' - \text{र}')(\text{र}'' + \text{र}') = \text{४ क} (\text{य}'' - \text{य}')$

$$\text{किंवा } \frac{\text{र}'' - \text{र}'}{\text{य}'' - \text{य}'} = \frac{\text{४ क}}{\text{र}'' + \text{र}'}$$

आता वक्रावर जेव्हा फ बिंदु प बिंदूकडे क्रमाक्रमाने सरकत जाऊन अंतिम स्थितींत त्याच्यावर संपतन पावतो तेव्हा पफ ही वक्राची स्पर्शरेषा होते.

य''=य' व र''=र' हे आदेश (२) या समीकाराच्या उजव्या बाजूच्या अपूर्णांकांत करून $\frac{\text{र}'' - \text{र}'}{\text{य}'' - \text{य}'}$ या निष्पत्तीची इष्ट अर्हा मिळते.

$$\therefore \quad \text{अंतिम स्थितींत, } \frac{\text{र}'' - \text{र}'}{\text{य}'' - \text{य}'} = \frac{\text{४ क}}{\text{र}'' + \text{र}'}$$

$$= \frac{\text{४ क}}{\text{२ र}'}$$

$$= \frac{\text{२ क}}{\text{र}'}$$

याचा (१) मधे आदेश करून (य',र') बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्श रेषेचा समीकार.

$$र - र' = \frac{२क}{र'} (य - य')$$

किंवा $र'(र - र') = २क (य - य')$

$$,, \quad रर' = २कय + र'^{२} - २कय'$$

$$= २कय + २कय' + र'^{२} - ४कय'$$

परंतु (य', र') एकेंद्रावर असल्यामुळे

$$र'^{२} - ४कय' = ०$$

∴ (य',र') या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$रर' = २क(य + य')$$

टीप:—अनुच्छेद ५०·२ मधे दिलेल्या सामान्य नियमानुसार दिलेल्या वक्राच्या समीकारावरून त्याच्या स्पर्शरेषेचा समीकार लिहितां येतो.

७९·१ $र = घय + \frac{क}{घ}$ ही स्पर्शरेषा $र^{२} = ४कय$ या एकेंद्राला जेथे स्पर्श करते त्या स्पर्शबिंदूचे याम काढणें.

समजा की स्पर्शबिंदूचे याम (य', र') आहेत. म्हणून (य',र') बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र र' = २ क (य + य')$$

आहे.

हा समीकार आणि दिलेला समीकार एकच सरल रेषा निरूपितात. म्हणून दोहोंतील य, र चे गुणक आणि अचल पदें अनुपाती असलीं पाहिजेत.

$$\therefore \quad \frac{र'}{१} = \frac{२ क}{घ} = \frac{२ क य'}{\frac{क}{घ}}$$

$$\therefore \quad र' = \frac{२ क}{ध}$$

$$आणि \quad य' = \frac{क}{ध^{२}}$$

म्हणून $र = धय + \frac{क}{ध}$ ही स्पर्शरेषा एकेंद्राला $\left(\frac{क}{ध^{२}}, \frac{२ क}{ध}\right)$ या बिंदूशीं स्पर्श करते.

८०. **(य', र') शीं असलेल्या अभिलंबाचा समीकार.**

(य', र') शीं असलेली स्पर्शरेषा

$र र' = २ क (य + य')$ आहे.

आता, (य', र') मधून जाणारी आणि (य', र') शीं असलेल्या स्पर्शरेषेला लंब असणारी रेषा हीच (य', र') शीं असलेला अभिलंब होय.

म्हणून अभिलंबाचा प्रवणक अर्थात्

$$'ध' = \frac{-१ . र'}{२क}$$

म्हणून अभिलंबाचा समीकार

$$र - र' = -\frac{र'}{२ क} \quad (य - य')$$

८१. **अभिलंबाचा समीकार**

$$र = धय - २ कध - कध^{३}$$

या रूपांत व्यक्त करणें.

मागील अनुच्छेदांत काढलेल्या अभिलंबाच्या समीकारांत $-\frac{र'}{२क} = ध$ किंवा $र' = -२कध$ ठेवून, त्या समीकाराचें प्रऱ्हसन

$$र - र' = ध (य - य')$$

$$किंवा \quad र + २ कध = ध (य - य')$$

असें होतें. पण

$$र'^{2} = ४ कय'$$

$$\therefore \quad ४ क^{2} ध^{2} = ४ कय'$$

$$\therefore \quad क ध^{2} = य'$$

वरील समीकारांत य' च्या अहँचा आदेश करून

$$र + २ कध = ध (य - कध^{2})$$

किंवा, $$र = धय - २ कध - कध^{3} \qquad (१)$$

हा (क ध², −२ कध) बिंदूशीं वक्राला असलेला अभिलंब आहे.

ध चें मान कोणतेंहि असलें तरी समीकार (१) ने निरूपिलेली सरळ रेषा, नेहमी एकेंद्राचा अभिलंब असते. म्हणून हा समीकार $र^{2} = ४ कय$ या एकेंद्राच्या कोणत्याहि अभिलंबाचा समीकार आहे.

समीकार (१) मधील 'ध' हा अक्षाशीं अभिलंबाने केलेल्या कोणाची स्पर्शज्या आहे. हा 'ध' स्पर्शरेषेच्या 'ध' हून वेगळा आहे. अभिलंब आणि स्पर्शरेषा यांच्या 'ध' मधील संबंध

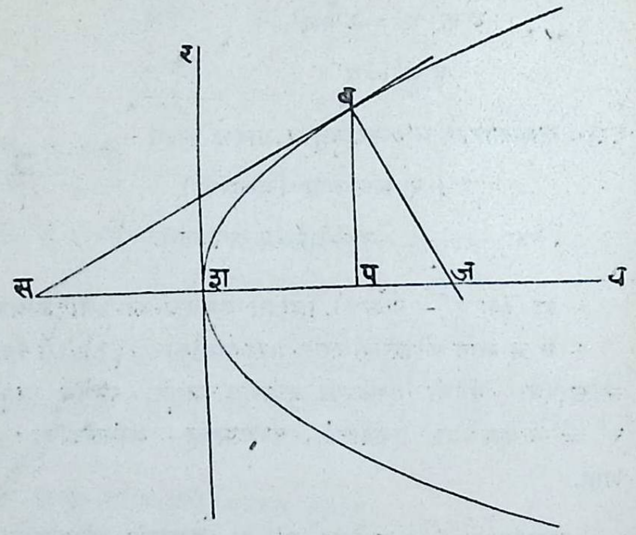
$$\text{अभिलंबाचा 'ध'} = \frac{-१}{\text{स्पर्शरेषेचा 'ध'}}$$

हा आहे.

८२ **अधः स्पर्शरेष व अधोलंब.**

एखाद्या शंकुच्छेदावरील ब या कोणत्याहि बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा आणि अभिलंब शंकुच्छेदाच्या अक्षास अनुक्रमें स आणि ज बिंदूंत मिळत असतील आणि बप ही ब बिंदूशीं असणारी कोटि असेल तर पस ला ब बिंदूची अधःस्पर्शरेषा (subtangent) आणि पज ला ब बिंदूचा अधोलंब (subnormal) म्हणतात.

८२.१ अधः स्पर्शरेष व अधोलंब यांच्या लांबी काढणें.



आ. ५९

$$र^2 = ४कय$$

या एकेंद्रावर ब (य',र') हा एक बिंदु आहे.

आतां सब स्पर्शरेषेचा समीकार रर' = २क(य+य') (१)

ही रेषा य अक्षास म्हणजे र=० या रेषेला ज्या बिंदूंत छेदते त्याचे याम काढण्यासाठी

समीकार (१) मध्ये र=० ठेवून

∴ य+य'=०

किंवा य=−य' (२)

म्हणून स बिंदूचे इष्ट याम (−य', ०)

अर्थात् शस ची संख्यात्मक लांबी $=$ य' . ब बिंदूचे याम (य', र') आहेत.

म्हणून शप सुद्धा $=$ य'

$\therefore$ शस $=$ शप.

समीकार (२) मधील ऋण चिन्ह स व प हे बिंदू य अक्षावर शिरोबिंदूच्या विरुद्ध बाजूस आहेत हें दर्शवितें.

आता अधःस्पर्शरेष पस $=$ २ शप

$=$ २(ब बिंदूचा भुज)

म्हणून एकेंद्राच्या कोणत्याहि बिंदूच्या अधःस्पर्शरेषेची लांबी त्या बिंदूच्या भुजाच्या दुप्पट असते.

सबज या लंबकोण त्रिकोणावरून,

$$\text{बप}^2 = \text{सप} \cdot \text{पज}$$

$$\therefore \quad \text{पज} = \frac{\text{बप}^2}{\text{सप}}$$

$$= \frac{\text{बप}^2}{\text{२शप}} \qquad \because \text{पस} = \text{२शप})$$

$$= \frac{\text{र}'^2}{\text{२य}'} \qquad (\because \text{बप} = \text{र}', \text{ व } \text{शप} = \text{य}')$$

पण ब हा बिंदु एकेंद्रावर असल्यामुळे

$$\text{र}'^2 = \text{४कय}'$$

$$\therefore \quad \text{पज} = \frac{\text{४कय}'}{\text{२य}'}$$

$$= \text{२क}$$

म्हणून ब च्या सर्व स्थितींकरिता अधोलंबाची लांबी अचल असून

तो दिलेल्या एकेंद्राच्या सामि-उत्थानासमान (semi-latus-rectum) असते.

८३. एखाद्या एकेंद्राला ($य_1$, $र_1$) या बिंदूपासून वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक आणि संपाती किंवा काल्पनिक अशा दोन स्पर्शरेषा काढतां येतात हें दाखविणें.

एकेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = धय + \frac{क}{ध} \qquad (१)$$

हा आहे. ही रेषा ($य_1$, $र_1$) बिंदूतून जात असल्यास

$$र_1 = धय_1 + \frac{क}{ध}$$

किंवा $$ध^2 य_1 - धर_1 + क = 0 \qquad (२)$$

हा ध मधे वर्गसमीकार आहे. यांपासून $य_1$ व $र_1$ च्या दिलेल्या अर्हांनुसार ध च्या या दोन अर्हा स्पर्शरेषा मिळतात. (२) या समीकाराचीं मूळें वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व समान, किंवा काल्पनिक असतील तदनुसार या दोन वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती, किंवा काल्पनिक असतात. (१) $र_1^2 - ४कय_1 > 0$ असल्यास समीकार (२) चीं मूळें वास्तविक व भिन्न असतात, अशा प्रकारांत ($य_1$, $र_1$) बिंदु एकेंद्राच्या बाहेर असून त्यापासून नेहमी दोन वास्तविक व भिन्न स्पर्शरेषा काढतां येतात. (अनुच्छेद ७५ पहा)

(२) $र_1^2 - ४कय_1 = 0$ असल्यास समीकार (२) चीं मूळें वास्तविक व समान असतात अशा प्रकारांत ($य_1$, $र_1$) बिंदु एकेंद्रावर असून त्यापासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा एकाच स्पर्शरेषा एकाच स्पर्शरेषेत (अर्थात् वक्राला ($य_1$, $र_1$) शीं असलेल्या स्पर्शरेषेत) विलीन होतात. (अनु. ७५ पहा).

(३) $र^2 - ४ कय_1 < ०$ असल्यास समीकार (२) ची मूळें काल्पनिक असतात; अशा प्रकारांत ($य_1$, $र_1$) बिंदु एकेंद्राच्या आंत असून त्यापासून वक्राला एकहि वास्तविक स्पर्शरेषा काढता येत नाहीं. अन्यशब्दांत आपण असें म्हणूं शकतों की या प्रकारांत ($य_1$, $र_1$) या एकेंद्राच्या आंत असणाऱ्या बिंदूपासून त्याला दोन स्पर्शरेषा काढतां येतात पण त्या काल्पनिक असतात.

उदाहरणसंग्रह १०

(१) $तय + थर + द = ०$ ही $र^2 = ४ कय$ या एकेंद्राची स्पर्शरेषा होण्याकरिता प्रतिबंध काढा. (बनारस १९३५)

(२) $र = २य$ या रेषेला समांतर असलेल्या, $र^2 = ८य$ या एकेंद्राच्या स्पर्शरेषेचा समीकार काढा. (बनारस १९३६)

(३) $र^2 = ४ य$ या एकेंद्रावरील (१, −२) बिंदूशीं असलेली स्पर्षरेषा (−२, १) बिंदूंतून जाते हें दाखवा. (मद्रास १९४२)

(४) $र = ३ य + २$ ही रेषा $र^2 = २४ य$ या एकेंद्राला स्पर्श करते हें दाखवा आणि स्पर्श बिंदूशीं असलेल्या अभिलंबाचा समीकार काढा. (नागपूर १९३८)

(५) $र = धय + ग$ ही रेषा ध आणि ग च्या कोणत्या अर्हांकरीता $य^2 + र^2 = \frac{क^2}{२}$ या वृत्ताला तसेंच $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राला स्पर्श करील ? (दिल्ली १९३५)

(६) ब (−१, −१) बिंदूंतून जाणारी व य—अक्षाशीं ४५° कोणाने अभिनत असणारी रेषा $र^2 = ४य$ या वक्राला प व फ बिंदूंत मिळते; तर बप आणि बफ यांच्या लांबी काढा. (दिल्ली १९३४)

(७) $र^2 = १२ य$ या एकेंद्रावरील (३, ६) बिंदूंशीं काढलेला अभिलंब एकेंद्राला पुन्हा (२७, −१८) या बिंदूंत मिळतो हें दाखवा. ही

जीवा व्यास धरून काढलेल्या वृत्ताचा समीकार

$$य^2+र^2-३०य+१२र-२७=०$$

हा आहे हे सिद्ध करा. (बनारस १९३७)

(८) एकेंद्रावरील व या कोणत्याहि बिदूंशीं असलेली स्पर्शरेषा अक्षाला स बिंदूंत मिळते. तर बस च्या मध्यबिंदूचा पथ काढा. (कलकत्ता १९२५)

(९) एक संकेंद्र (concentric) वृत्ताच्या श्रेणीला एक स्थिर सरळ रेषा ज्या बिंदूंत छेदते त्या बिंदूंशीं वृत्तांना स्पर्शरेषा काढल्या तर त्या सर्व स्पर्शरेषा एका एकेंद्राला स्पर्श करतात हें सिद्ध करा. (मुंबई १९३०)

(१०) एकेंद्राच्या अक्षावरील एका स्थिर बिंदूतून जीवा काढल्या तर त्यांच्या मध्यबिंदूचा पथ एक एकेंद्र आहे हें सिद्ध करा. (मद्रास १९४०)

(११) $य^2+र^2=क^2$ या वृत्ताच्या स्पर्शरेषांच्या $र^2=४कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या ध्रुवांच्या पथाचा समीकार काढा. (नागपूर १९२६)

(१२) $र^2=४कय$ या एकेंद्राच्या $र=धय+\frac{क}{ध}$ आणि $र=ध_1य+\frac{क}{ध_1}$ या दोन स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु काढा आणि यावरून, हा छेदनबिंदु उत्थानावर राहाण्याकरिता प्रतिबन्ध काढा. (कलकत्ता १९३०)

(१३) दोन समान एकेंद्रांचा शिरोबिंदु एकच असून त्यांचे अक्ष एकमेकांस लंब आहेत. तर त्यांची साधारण स्पर्शरेषा प्रत्येकाला उत्थानाच्या एका टोकाशीं स्पर्श करते हें सिद्ध करा. (कलकत्ता १९३५)

(१४) एखाद्या एकेंद्राचें सामिउत्थान कोणत्याहि नाभिजीवेच्या दोन

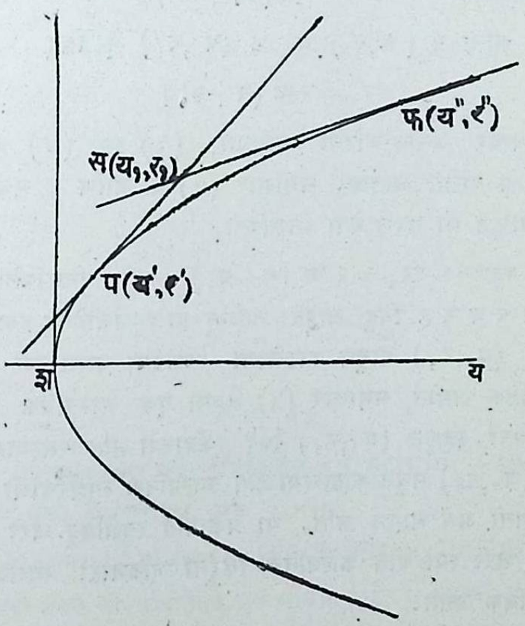
खंडांमधील (segments) हरात्मक मध्यक (harmonic mean) आहे हें सिद्ध करा.

(१५) एकेंद्राचें सामिउत्थान त्थ असल्यास अक्षाशीं ऊ हा कोण करणाऱ्या नाभिजीवेची लांबी २त्थव्युज्ज्या^{2}ऊ असते हें सिद्ध करा.

(१६) एकेंद्राच्या तीन स्पर्शरेषांमुळे निर्माण झालेल्या त्रिकोणाचें लंबकेंद्र नियतेवर असते हें सिद्ध करा.

---

८४. $र^2 = ४ कय$ या एकेंद्राला $(य_1, र_1)$ या बाह्य बिंदूपासून काढलेल्या स्पर्शरेषांच्या स्पर्शजीवेचा समीकार काढणें.



समजा $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राला स ($य_1, र_1$) पासून काढलेल्या सप व सफ या स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदू प ($य', र'$) व फ ($य'', र''$) आहेत.

प व फ या स्पर्शबिंदूंशीं असलेल्या स्पर्शरेषांचे समीकार

$$र\,र' = २क\,(य + य') \qquad (१)$$

$$र\,र'' = २क\,(य + य'') \qquad (२)$$

(१) व (२) या दोन्हीं स्पर्शरेषा स ($य_1$, $र_1$) बिंदूंत छेदतात, अर्थात् त्या स ($य_1, र_1$) मधून जातात.

म्हणून
$$र_1 र' = २क(य_1 + य') \qquad (३)$$

$$र_1 र'' = २क(य_1 + य'') \qquad (४)$$

आता प ($य', र'$) व फ ($य'', र''$) हे बिंदू

$$र र_1 = २\,क\,(य + य_1) \qquad (५)$$

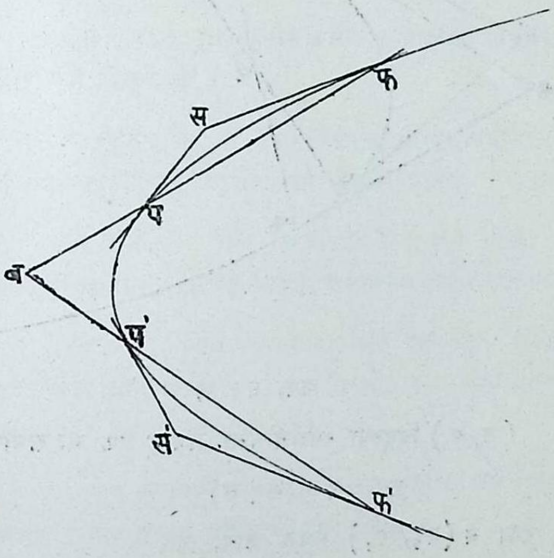
या पथावर असण्याकरिता प्रतिबंध, (३) व (४) हे समीकार असून ते पाळले जातात. समीकार (५) य आणि र मधे एकघाती असल्यामुळे तो सरल रेषा निरूपितो.

म्हणून $र र_1 = २\,क\,(य + य_1)$ याने निरूपिलेल्या सरळ रेषेवर प व फ हे बिंदू आहेत; अर्थात् हा स्पर्शजीवेचा इष्ट समीकार आहे. ($य_1, र_1$) पासून काढलेल्या स्पर्शरेषा वास्तविक असोत वा काल्पनिक असोत, समीकार (५) नेहमी एक वास्तविक सरळ रेषा निरूपितो, म्हणून ($य_1, र_1$) बिंदु एकेंद्राच्या आंत असल्यास समीकार (५) ($य_1, र_1$) मधून काढलेल्या दोन काल्पनिक स्पर्शरेषांची स्पर्शजीवा निरूपितो असें मानलें जातें. या प्रकारांत स्पर्शबिंदू जरी काल्पनिक असले तरी त्या दोन काल्पनिक बिंदूंना जोडणारी स्पर्शजीवा मात्र वास्तविक असते.

जेव्हा ($य_1, र_1$) बिंदु एकेंद्रावर असतो तेव्हा त्याची स्पर्शजीवा

त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेशीं संपाती होते. स्पर्शजीवेचे व स्पर्शरेषेचे समीकार एकच आहेत, यावरूनहि या विधानाची सत्यता दिसून येते.

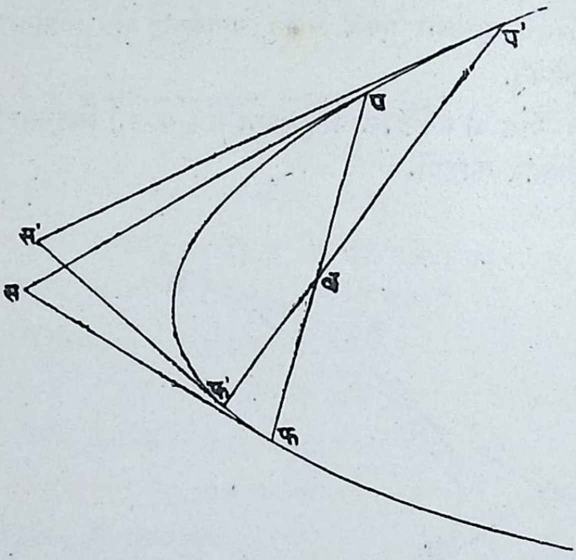
८५. $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून ब ($य_1, र_1$) बिंदूच्या ध्रुवीयाचा समीकार काढणें.



आ. ६१

अनुच्छेद ५५ मधे परिभाषित केल्याप्रमाणे ब ($य_1, र_1$) चा ध्रुवीय एका बिंदूचा पथ होय.

ब ($य_1, र_1$) मधून जाणारी व एकेंद्राला प आणि फ बिंदूंत छेदणारी बपफ ही कोणतीहि एक जीवा आहे. प आणि फ या बिंदूंशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषा स (त, थ) बिंदूंत मिळतात. आता आपण स बिंदूचा पथ काढूं.



आ. ६२ अ

(त, थ) बिंदूच्या स्पर्शजीवेचा अर्थात् पफ चा समीकार

$$र थ = २ क (य + त) \qquad (१)$$

ही रेषा ब ($य_1$, $र_1$) मधून जाते.

$$\therefore र_1 थ = २क (य_1 + त) \qquad (२)$$

बपफ च्या निरनिराळ्या स्थितींनुसार हा संबंध (त,थ) च्या निरनिराळ्या अर्हांकरिता सत्य आहे.

म्हणून (त, थ) चा पथ

$$र_1 र = २क(य_1 + य)$$

या समीकाराने निरूपिला जातो. म्हणून हा ($य_1$, $र_1$) बिंदूच्या ध्रुवीयाचा इष्ट समीकार आहे. हा समीकार य आणि र

मधे एकघाती असल्यामुळे तो सरळरेषा निरूपितो.

म्हणून $(य_1, र_1)$ बिंदूचा ध्रुवीय एक सरळ रेषा असून त्याचा समीकार

$$रर_1 = २ क (य + य_1)$$

हा आहे.

$(य_1, र_1)$ चा ध्रुवीय आणि स्पर्शजीवा यांचे समीकार एकच आहेत हें दिसून येईल.

यावरून $(य_1, र_1)$ हा बिंदु एकेंद्राबाहेर असल्यास त्याचा ध्रुवीय (किंवा ध्रुवीरेषा) स्पर्शजीवेशीं संपाती होतो.

$(य_1, र_1)$ बिंदु एकेंद्रावर असल्यास त्याचा ध्रुवीय आणि स्पर्शजीवा हीं दोन्ही त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेशीं संपाती होतात.

$(य_1, र_1)$ बिंदु एकेंद्राच्या आंत असल्यास, $(य_1, र_1)$ पासून काढलेल्या दोन काल्पनिक स्पर्शरेषांच्या दोन काल्पनिक स्पर्श बिंदूंना जोडणारी रेषाच ध्रुवीरेषा होते.

म्हणून वृत्तप्रकरणांतील अनुच्छेद ५६.१ मधें दिल्याप्रमाणे, ध्रुव आणि ध्रुवीय यांच्या परिभाषा देतां येतात.

उपसाध्य :—नाभीचा ध्रुवीय नियता असते. नाभीचे याम (क, ०) आहेत. म्हणून तिच्या ध्रुवीयाचा समीकार

$$र \times ० = २ क (य + क)$$

किंवा $$य + क = ०$$

परंतु हा नियतेचाहि समीकार आहे.

म्हणून नाभीचा ध्रुवीय नियता असते.

८५.१ प ($य_१, र_१$) या ध्रुवीय फ ($य_२, र_२$) या बिंदूंतून जात असल्यास फ चा ध्रुवीय प तून जातो.

$र^२ = ४ कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून प ($य_१, र_१$) चा ध्रुवीय

$$र र_१ = २ क (य + य_१) \qquad (१)$$

परंतु ही रेषा ($य_२, र_२$) मधून जात असल्यामुळे

$$र_२ र_१ = २ क (य_२ + य_१) \qquad (२)$$

आता फ ($य_२, र_२$) चा ध्रुवीय

$$र र_२ = २ क (य + य_२)$$

प ($य_१, र_१$) मधून जाण्याकरिता असलेला प्रतिबंध

$$र_१ र_२ = २क (य_१ + य_२).$$

परंतु (२) मुळे अगोदरच पाळला गेला आहे. म्हणून फ चा ध्रुवीय प तून जातो.

उपसाध्य :– प आणि फ या दोन बिंदूंच्या ध्रुवीयांचा छेदनबिंदु स, पफ रेषेचा ध्रुव असतो.

वृत्तासंबंधी दिलेल्या अनुच्छेद ५६.१ च्या उपसाध्याप्रमाणे हें सहज सिद्ध करतां येतें.

८५.२ $र^२ = ४ कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून काय + खार + गा = ० या रेषेचा ध्रुव काढणें.

समजा इष्ट ध्रुवाचे याम (त, थ) आहेत.

म्हणून (त, थ) च्या ध्रुवीयाचा समीकार

$$रथ = २क (य + त)$$

किंवा $२कय - रथ + २कत = ०$ (१)

परंतु (त, थ) हे काय + खार + गा = ० (२)

या रेषेच्या ध्रुवीयाचे याम मानले असल्यामुळे (२) ही हि

(त,थ) चा ध्रुवीय होते.

$\therefore$ (१) व (२) हे दोन्ही समीकार एकच रेषा निरुपितात.

म्हणून त्यांतील गुणकांची तुलना करून

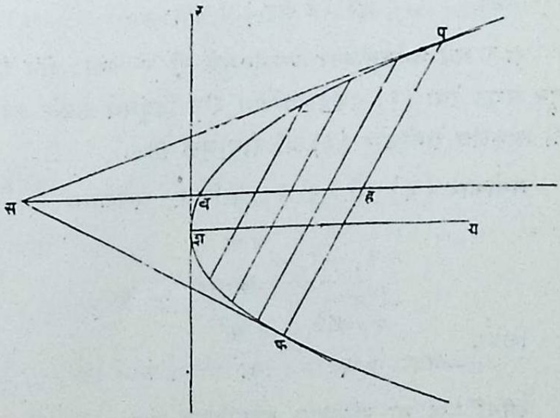
$$\frac{२क}{का} = \frac{-थ}{खा} = \frac{२कत}{गा}$$

यावरून $$त = \frac{गा}{का}$$

आणि $$थ = -\frac{२कखा}{का}$$

म्हणून इष्ट ध्रुव, $\left(\frac{गा}{का}, \frac{-२कखा}{का}\right)$ हा बिंदु होय.

८६. एकेंद्राच्या समांतर जीवांच्या संहतोचे (system) मध्यबिंदू एकेंद्राच्या अक्षाला समांतर असलेल्या सरळ रेषेवर असतात हें सिद्ध करणें.



आ. ६२

आता सर्व जीवा एकमेकांस समांतर असल्यामुळे प्रवणक 'ध' तोच राहील.

समजा की या समांतर जीवांपैकीच पफ ही एक जीवा असून तिचा समीकार

$$र = धय + ग \qquad (१)$$

हा आहे. निरनिराळया जीवांकरिता ग ची अर्हा भिन्न असून 'ध' चें मान मात्र सर्व जीवांकरिता एकच आहे.

सरळ रेषा (१)

$$र^{२} = ४ \, कय \qquad (२)$$

या एकेंद्राला प व फ बिंदूंमधे मिळते; म्हणून समीकार (१) व (२) य आणि र करिता सोडवून प व फ बिंदूंचे याम मिळतात.

आता (१) मधून (२) मधे य करिता आदेश करून.

$$र^{२} = \frac{४ \, क \, (र - ग)}{ध}$$

किंवा,
$$धर^{२} - ४ \, कर + ४ \, कग = ० \qquad (३)$$

हा र मधे वर्गसमीकार असल्यामुळे तो र च्या दोन अर्हा देतो. म्हणून सरळ रेषा (१) एकेंद्राला ज्या दोन बिंदूंमधे छेदते त्या बिंदूंच्या कोटी म्हणजेच समीकार (३) चीं दोन मूळें होत.

समीकार (३) चीं मूळें $र_{१}$ आणि $र_{२}$ असल्यास

$$र_{१} + र_{२} = \frac{४ \, क}{ध}$$

किंवा,
$$\frac{र_{१} + र_{२}}{२} = \frac{२ \, क}{ध}$$

आता पफ या जीवेच्या मध्यबिंदूचे याम (त, थ) असल्यास, ग च्या सर्व अर्हांकरिता

$$थ = \frac{र_1 + र_2}{२} = \frac{२ क}{ध}$$

म्हणून, ग चें मान कांहीहि असलें तरी या संहतीच्या कोणत्याहि जीवेच्या मध्यबिंदूचा र–याम अचल असून $\frac{२ क}{ध}$ समान आहे.

म्हणून या समांतर जीवांचे मध्यबिंदू $र = \frac{२ क}{ध}$ या एका सरळ रेषेवर रहातात.

आता $र = \frac{२ क}{ध}$ ही रेषा य–अक्षाला अर्थात् एकेंद्राच्या अक्षाला समांतर आहे.

म्हणून एकेंद्राच्या कोणत्याहि समांतर-जीवा-संहतीचे मध्यबिंदू एका सरळ रेषेवर असून ती रेषा एकेंद्राच्या अक्षाला समांतर असते.

८६.१ $र = \frac{२ क}{ध}$ ही रेषा $र^2 = ४ कय$ या एकेंद्राला ब या बिंदूंत मिळते

म्हणून ब बिंदूची कोटि $\frac{२ क}{ध}$ असून त्याचा भुज

$$\frac{४क^2}{ध^2} = ४ कय$$

किंवा $$य = \frac{क}{ध^2}$$

आहे.

म्हणून ब चे याम $\left(\frac{क}{ध^2}, \frac{२क}{ध}\right)$ आहेत.

या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र . \frac{२क}{ध} = २क \left(य + \frac{क}{ध^2} \right)$$

किंवा $र = धय + \frac{क}{ध}$.

या स्पर्शरेषेचा 'ध' समांतर जीवांच्या 'ध' समान आहे. म्हणून ही स्पर्शरेषा त्या प्रत्येक जीवेला समांतर आहे.

यावरून, एकेंद्राच्या एखाद्या समांतर-जीवा-संहतीच्या मध्यबिंदूंचा पथ त्याच्या अक्षास समांतर असणारी एक सरळ रेषा असते आणि ही रेषा एकेंद्राला ज्या बिंदूंत छेदते त्या बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा दिलेल्या जीवासंहतीस समांतर असते.

८६.२ व्यासः— एकेंद्राच्या एखाद्या समांतर-जीवा-संहतीच्या मध्यबिंदूंच्या पथाला एकेंद्राच्या 'व्यास' आणि त्या जीवांना त्याच्या 'द्विगुण कोटी' म्हणतात.

८६ व्या अनुच्छेदाच्या आकृतींत बह हा व्यास असून पफ व इतर सर्व समांतर जीवा या व्यासाच्या कोटी आहेत.

एकेंद्राचा कोणताहि व्यास त्याच्या अक्षास समांतर असून तो व्यास एकेंद्राला ज्या बिंदूंत छेदतो त्या बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा व्यासाच्या कोटींना समांतर असते.

उदा० १:— (त,थ) या बिंदूशीं दुभागलेल्या एकेंद्राच्या जीवेचा समीकार.

८६.१ या अनुच्छेदावरून (त, थ) या बिंदूतून जाणारा व्यास अक्षाला समांतर असून तो एकेंद्राला ज्या ब ह्या बिंदूंत मिळतो त्या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेला इष्ट जीवा समांतर असते.

या व्यासाचा समीकार र=थ असून तो वक्राला ज्या बिंदूंत मिळतो त्या बिंदूचा भुज

$$र^2 = ४ कय$$

$$य = \frac{थ^2}{४क} \quad \text{आहे.}$$

म्हणून ब चे याम $(\frac{थ^2}{४क}, थ)$ आहेत.

आता ब शीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र थ = २ क \left(य + \frac{थ^2}{४क}\right)$$

या रेषेचा 'ध' $= \frac{२क}{थ}$

म्हणून या स्पर्शरेषेला समांतर असणाऱ्या आणि (त, थ) बिंदूंतून जाणाऱ्या इष्ट जीवेचा समीकार

$$र - थ = \frac{२क}{य} (य - त)$$

किंवा $थ (र - थ) = २ क (य - त)$

हा होईल.

अन्यथा :—

(त, थ) मधून जाणाऱ्या कोणत्याहि सरळ रेषेचा समीकार

$$र - थ = ध (य - त)$$

हा आहे. ही रेषा $र^2 = ४कय$ या वक्राला दोन बिंदूंत छेदते. त्या छेदनबिंदूंचे याम

$$र^2 = ४क \left(\frac{र - थ}{ध} + त \right)$$

किंवा $धर^2 - ४कर + ४क (थ - धत) = ०$

या वर्गसमीकाराने मिळतात.

आता वरील रेषा आणि वक्र यांच्या दोन छेदनबिंदूंच्या कोटी $र_1$ व $र_2$ असल्यास

$$र_1 + र_2 = \frac{४क}{ध}$$

पण जीवेचा मध्यबिंदु (त, थ) आहे.

$$\therefore \quad थ = \frac{र_1 + र_2}{२}$$

$$= \frac{४क}{२ध}$$

$$= \frac{२क}{ध}$$

$$\therefore ध = \frac{२क}{थ}$$

'ध' च्या या अर्हेचा आदेश करून इष्ट जीवेचा समीकार

$$र - थ = \frac{२क}{थ}(य - त)$$

किंवा $$थ(र - थ) = २क(य - त)$$

उदा० २ रें :– (य,' र') या बिंदूमधून जाणाऱ्या, $र^2 = ४ कय$ या एकद्राच्या, सर्व जीवांच्या मध्यबिंदूचा पथ

$$२ क (य - य') = र^2 - रर'$$

हा एकद्र आहे हें सिद्ध करा.

समजा (त, थ) हा एका जीवेचा मध्यबिंदु आहे. तर त्या जीवेचा समीकार

$$थ(र - थ) = २क(य - त)$$

ही जीवा (य',र') बिंदूंतून जात असल्यास,

$$थ(र' - थ) = २क(य' - त)$$

म्हणून (त, थ) या बिंदूचा पथ

$$र\,(र' - र) = २क\,(य' - य)$$

$$\text{किंवा}\quad र^२ - रर' = २क\,(य - य')$$

हा होय. मूलबिंदूचें $\left[य' - \frac{र'^२}{८क} , \frac{र'}{२} \right]$ बिंदूस स्थानांतर केल्यास या समीकाराचें एकेंद्राच्या प्रमाप समीकारांत परिवर्तन होतें, म्हणून इष्ट पथ एकेंद्र आहे.

उदा. ३ :— स (त, थ) या बिंदूंतून जाणारी आणि $र^२ = ४\,कय$ या एकेंद्राच्या अक्षाला समांतर असलेली सरळ रेषा एकेंद्रास ब बिंदूंत मिळत असल्यास ब शीं असलेली स्पर्शरेषा स(त, थ) च्या ध्रुवीयाला समांतर असते हें सिद्ध करा.

स (त, थ) मधून जाणाऱ्या आणि एकेंद्राच्या अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचा समीकार

$$र = थ$$

हा आहे. ही रेषा वक्राला ब बिंदूंत मिळते. ब बिंदूचा भुज

$$थ^२ = ४कय$$

किंवा

$$य = \frac{थ^२}{४क} \text{ आहे.}$$

म्हणून ब बिंदूचे याम $\left(\frac{थ^२}{४क}, थ \right)$ आहेत.

आतां ब बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र\,थ = २क \left(थ + \frac{थ^२}{४क} \right) \qquad (१)$$

आणि स (त, थ) च्या ध्रुवीयाचा समीकार

$$र\,थ = २क\,(य + त) \qquad (२)$$

समीकार (१) व (२) यांनी निरूपिलेल्या रेषांचा 'ध' एकच अर्थात् $\frac{२क}{थ}$ समान असल्यामुळे त्या एकमेकास समांतर आहेत.

८७ एकेंद्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम एका चल राशींच्या पदांत व्यक्त करणे:-- प्राचल (parametric) याम.

(१) वक्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम एका चल राशीच्या पदांत व्यक्त करणें पुष्कळदा सोयीचें असतें.

$र^2 = ४ कय$ या समीकारांत $र = २ कत$ घेतल्यास $य = कत^2$ होते.

म्हणून $य = कत^2$

आणि $र = २कत$

हे त च्या सर्व अर्हांकरिता $र^2 = ४कय$ या समीकाराचें समाधान करतात. त च्या प्रत्येक अर्हेशीं संवादी असणारा एक (य, र) बिंदु एकेंद्रावर आहे. म्हणून त च्या निरनिराळ्या अर्हा घेऊन आपणांस वक्रावरील निरनिराळे बिंदू मिळतात. म्हणून आपणांस वक्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम ($कत^2$, २ कत) याप्रमाणें त या एकाच चल राशीच्या पदांत व्यक्त करतां येतात. या यामांना प्राचल-याम म्हणतात. आणि त या चल राशीला 'प्राचल' म्हणतात.

(२) $य = \frac{क}{ध^2}$, $र = \frac{२क}{ध}$ या अर्हासुद्धा वक्राच्या समीकाराचें समाधान करतात. म्हणून ध च्या सर्व अर्हांकरिता ($\frac{क}{ध^2}$, $\frac{२क}{ध}$) हा बिंदु नेहमी वक्रावर राहतो, म्हणून ध हें प्राचल घेऊन एकेंद्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम या प्राचलाच्या पदांत व्यक्त करतां येतात.

(३) त्याचप्रमाणें $य = कध^2$ व $र = २ कध$ हे यामहि

एकेंद्राच्या समीकाराचें समाधान करतात. म्हणून हे याम सुद्धा वक्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे प्राचल–याम म्हणून घेतां येतात.

(१) मधील यामांमधे अनुक्रमें $त = \frac{१}{ध}$ अणि $त = -ध$ घेऊन (२) आणि (३) मधील याम काढतां येतात. हें दिसून येईल. म्हणून आपण (१) मधे दिलेले यामच एकेंद्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे प्राचल याम घेऊं.

८७·१ $र^२ = ४ कय$ या एकेंद्रावरील ($कत^२$, २कत) या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार.

७९ व्या अनुच्छेदानें, इष्ट समीकार

$$र . २ कत = २ क (य + कत^२)$$

अर्थात् $$त र = य + कत^२$$

हा होय.

८७·२ ($कत^२$, २ कत) बिंदूशीं असलेल्या अभिलंबाचा समीकार.

इष्ट अभिलंब त्या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेला लंब असल्यामुळे त्याचा समीकार,

$$(र - २ कत) = -त (य - कत^२)$$

किंवा $$र - २ कत = - तय + कत^३$$

किंवा $$र + तय = कत + कत^३$$

किंवा $$र + तय - २कत - कत^३ = ०$$

८७·३ ($कत_१^२$, $२कत_१$) आणि ($कत_२$, $२कत_२^२$) हे दोन बिंदू जोडणाऱ्या सरळ रेषेचा समीकार,

२३ व्या अनुच्छेदानें, इष्ट समीकार :—

$$र - २कत_१ = \frac{२कत_२ - २कत_१}{कत_२^२ - कत_१^२} (य - कत_१^२)$$

किंवा $$र - २कत_{१} = \frac{२क(त_{२} - त_{१})}{क(त_{२}^{२} - त_{१})}(य - कत_{१}^{२})$$

किंवा $$र - २कत_{१} = \frac{२(त_{२} - त_{१})}{(त_{२} - त_{१})(त_{१} + त_{१})}(य - कत_{१}^{२})$$

दक्षिण पक्षाच्या अंश व हर यांतील $(त_{१} - त_{१})$ हा साधारण अवयव काढून टाकून

$$र - २कत_{१} = \frac{२}{त_{२} + त_{१}}(य - कत_{१}^{२})$$

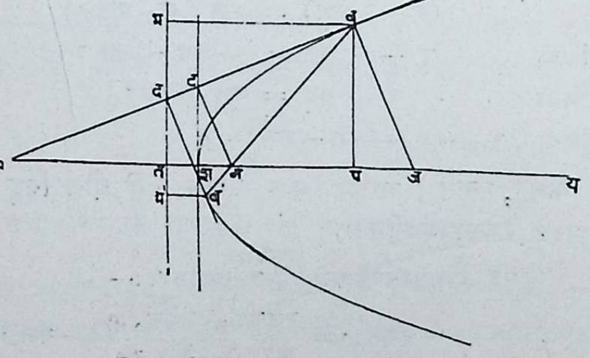
किंवा $$र(त_{१} + त_{२}) = २(य - कत_{१}^{२}) + २कत_{१}(त_{२} + त_{१}) = २य + २कत_{१}त_{२}$$

उपसाध्यः— '$त_{१}$' आणि '$त_{२}$' या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेच्या समीकारांत $त_{२} = त_{१}$ ठेवून, '$त_{१}$' बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$त_{१}र = य + कत_{१}^{२}$$

या रूपांत मिळतो.

८८. एकेन्द्राचे कांही गुणधर्म.



आ. ६३

एकेंद्रावर ब (य',र') हा कोणताहि एक बिंदु असून ब या बिंदूशीं बस ही स्पर्शरेषा आणि बज हा अभिलंब आहे.

आकृतीवरून बप समान र' ही ब ची कोटि असून शप समान य' त्याचा भुज आहे.

एकेंद्राची नाभि न असून तभ ही त्याची नियता आहे. श शिरोबिंदूशीं असलेली शट ही स्पर्शरेषा बस ला ट बिंदूंत मिळते.

८८.१ (१) नस=नज=नब हें सिद्ध करणें.

ब (य', र') या बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा

$$र र' = २क(य+य')$$

ही आहे. ही य–अक्षाला अर्थात् र=० ला ज मधे मिळते. त्या ठिकाणीं

$$य+य' = ०$$

किंवा $$य = -य'$$

म्हणून स चे याम (—य', ०) आहेत.

∴ सश ची लांबी=य'

आता $$शन = क$$

∴ $$सश+शन = य'+क$$

अर्थात् $$सन = य'+क$$

किंवा संख्येने

$$नस = य'+क$$

५५ ब (य',र') चें नाभ्यंतर नब सुद्धा य'+क आहे.

∴ नस=नब

बज या अभिलंबाचा समीकार

$$र - र' = - \frac{र'}{२क} (य - य')$$

हा आहे. हा य–अक्षाला म्हणजे र = ० ला ज मधे मिळतो. त्या ठिकाणीं

$$- र' = - \frac{र'}{२क} (य - य')$$

किंवा $य - य' = २क$

किंवा $य = य' + २क$

म्हणून ज चे याम (य' + २क, ०) हे आहेत.

∴ शज हें अंतर = य' + २क

पण शन = क

∴ शज–शन = य' + क

किंवा नज = य' + क

= नाभ्यंतर नब

∴ नश = नब = नज

रैखिकीय रीत :—

८२.१ या अनुच्छेदाने

शस = शप

आता श हा बिंदु एकेंद्रावर असून तभ ही नियता असल्यामुळे

नश = तश

∴ शस + नश = शप + तश

किंवा नस = पत

पण पत = बभ

आणि ब बिंदु एकेंद्रावर असल्यामुळे

बभ = नब

∴ नसन = ब

आता सबज हा लंबकोण त्रिकोण आहे

व नस = नब

म्हणून, रैखिकीने

नब = नज

∴ नस = नब = नज

८८.२. (२) कोणतींहि स्पर्शरेषा अक्षाशीं आणि नाभिरेषेशीं (focal line) समान कोण करते.

अर्थात् ∠नवस = ∠बसन हें सिद्ध करणें.

आता नस = नब असल्यामुळे, △ बसन समद्विभुज आहे.

∴ ∠नबस = ∠बसन

८८.३ (३) ब शीं असलेली स्पर्शरेषा, ब बिंदूपासून नियतेवर काढलेला लंब बभ आणि नाभिरेषा नब यांमधील कोण दुभागते.

अर्थात् ∠ नबस = ∠सबभ हें सिद्ध करणें.

आता, सन रेषा बभ ला समांतर आहे.

∴ ∠ नसब = व्युत्क्रम ∠सबभ

पण ∠नसब = ∠नबस (अनु० ८८.२)

∴ ∠नबस = ∠सबभ

उपसाध्य :—न, ब, भ आणि स या चार बिंदूंमुळे एक समभुज चौकोण (rhombus) तयार होतो.

८८.४. ब (य', र') शीं असलेली स्पर्शरेषा नियतेला द बिंदूंत मिळत असेल तर दनब हा कोण लंबकोण होतो.

ब (य', र') शीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र\ र' = २क\ (य + य') \qquad (१)$$

नियतेचा समीकार

$$थ + क = ० \qquad (२)$$

हा आहे. स्पर्शरेषा (१) नियतेला द बिंदूंत मिळते. म्हणून समीकार (१) व (२) सोडवून द बिंदूचे याम मिळतील.

(१) मधे य=−क ठेवून

$$र\ र' = २\ क\ (-क + य')$$

$$\therefore \qquad र = \frac{२\ क\ (य' - क)}{र'}$$

म्हणून द बिंदूचे याम $\left[-क, \dfrac{२\ क\ (य' - क)}{र'}\right]$ हे आहेत.

आता, न आणि द बिंदूंचे याम अनुक्रमें (क, ०) व $\left[-क, \dfrac{२\ क\ (य' - क)}{र'}\right]$ असल्यामुळे

$$दन\ रेषेचा\ 'ध' = \frac{\dfrac{२\ क\ (य' - क)}{र'} - ०}{-क - क}$$

$$= -\frac{(य' - क)}{र'}$$

त्याचप्रमाणे न (क, ०) व ब (य', र') या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या

$$नब\ रेषेचा\ 'ध' = \frac{र' - ०}{य' - क}$$

$$= \frac{र'}{य' - क}$$

$$\therefore \text{ दोन 'ध' चा गुणाकार} = \left[\frac{-(\text{य}'-\text{क})}{\text{र}'}\right] \times \left[\frac{\text{र}'}{(\text{य}'-\text{क})}\right]$$

$$= -१$$

म्हणून दन रेषा नव ला लंब आहे.

हें प्रमेय पुढे दिल्याप्रमाणेहि लिहितां येतें.

नियता आणि कोणतीहि स्पर्शरेषा यांचा छेदनबिंदु आणि नाभि यांना जोडून येणारी रेषा, नाभि आणि स्पर्शबिंदु यांना जोडणाऱ्या रेषेला लंब असते.

अन्यथा :— रैखिकीय रीत.

समजा की बभ ही रेषा ब बिंदूपासून नियतेवर काढलेला लंब आहे.

दभब व दनब या दोन त्रिकोणांत

(१) बभ = बन (वक्राच्या गुणधर्मानुसार)

(२) दब रेषा साधारण आहे

(३) ∠दबभ व ∠दबन हे अंतर्गत (included) कोण समान आहेत. (अनु० ८८.३)

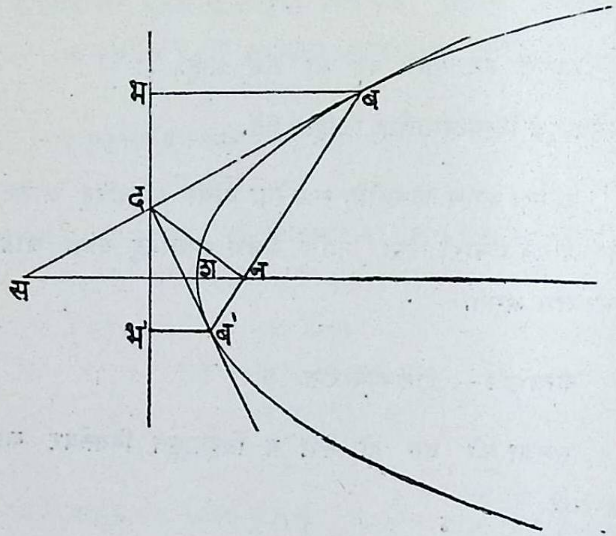
म्हणून हे दोन त्रिकोण सर्वांगसम (congruent) आहेत.

∴ ∠दभब = ∠दनब

पण ∠दभब = १ लंबकोण

म्हणून ∠दनब लंबकोण आहे.

८८.५ नाभिजीवेच्या टोकांशीं असलेल्या स्पर्शरेषा नियतेवर लंबकोण करून मिळतात.



आ. ६४

ब शीं असलेली स्पर्शरेषा नियतेला द बिंदूंत मिळते. द बिंदुतून दब' ही दुसरी स्पर्शरेषा काढा. बन, ब'न व दन जोडा.

बब' एक नाभिजीवा आहे. किंवा ब', न आणि ब हे बिंदू एकाच सरळ रेषेंत आहेत हे आपणांस सिद्ध करावयाचे आहे.

आता, अनुच्छेद ८८.४ वरून,

$$\angle \text{दनब} = १ \text{ लंबकोण}$$

तसेंच

$$\angle \text{दनब}' = १ \text{ लंबकोण}$$

म्हणून ब', न आणि ब हे एकाच सरळ रेषेंत आहेत. अर्थात् बब' एक नाभिजीवा आहे.

म्हणून बब' या नाभिजीवेच्या टोकांशीं असलेल्या स्पर्शरेषा नियतेवर द या बिंदूंत मिळतात.

आता आपण दब रेषा दब' ला लंब आहे हें सिद्ध करूं.

$\triangle$दभब व $\triangle$दनब हे सर्वांगसम आहेत हें मागे सिद्ध केलेंच आहे.

$\therefore$ $\angle$नदब $=$ $\angle$भदब (१)

त्याचप्रमाणे, $\triangle$दभ'ब' व $\triangle$दनब' सर्वांगसम असल्यामुळे

$\angle$नदब' $=$ $\angle$भ'दब' (२)

(१) व (२) चा योग करून

$\angle$नदब' $+$ $\angle$नदब' $=$ $\angle$भदब $+$ $\angle$भ'दब'

किंवा $\angle$बदब' $=$ $\angle$भदब $+$ $\angle$भ'दब'

पण $\angle$बदब' $+$ $\angle$भदब $+$ $\angle$भ'दब' $=$ २ लंबकोण

म्हणून, $\angle$बदब' $=$ १ लंबकोण

अर्थात् दब रेषा दब' ला लंब आहे.

अन्यथा :— कोणत्याहि नाभिजीवेच्या टोकांशीं असलेल्या स्पर्शरेषा नियतेवर मिळतात हें प्रमेय सिद्ध करणें, म्हणजे

(१) नाभीचा ध्रुवीय नियता आहे.

किंवा (२) नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूंची स्पर्शजीवा नाभींतून जाते.

यांपैकी कोणतेंहि एक प्रमेय सिद्ध करण्यासारखें आहे.

८८.६ नाभीचा ध्रुवीय नियता असते हें आपण अनु० ८५ मधे सिद्ध केलें आहे.

आता नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूंची स्पर्शजीवा नेहमी नाभीतून जाते हें सिद्ध करूं.

नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूंचे याम (–क, र') आहेत. म्हणून या बिंदूच्या स्पर्शजीवेचा समीकार

रर' $=$ २क (य $-$ क)

किंवा $२क(य-क)-र'र=०$

किंवा $(य-क)-\frac{र'}{२क}र=०$

आता, र' च्या सर्व अर्हांकरिता ही रेषा $य-क=०$ व $र=०$ याच्या छेदनबिंदूंतून अर्थात् (क,०) या नाभीमधून जाते म्हणजेच नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूची स्पर्शजीवा नाभींतून जाते.

८८.७. नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूपासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषां-मधील कोण नेहमीं लंबकोण असतो हें आता आपण सिद्ध करूं.

एकेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र=धय+\frac{क}{ध}$$

किंवा $यध^{२}-धर+क=०$

ही रेषा (—क, र') या नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूंतून जात असल्यास,

$$-कध^{२}-र'ध+क=०$$

हा 'ध' मधे वर्ग समीकार आहे, व यापासून मिळणाऱ्या 'ध' च्या दोन अर्हा (—क, र') बिंदूपासून काढतां येणाऱ्या दोन स्पर्शरेषांचे प्रवणक आहेत. $ध_{१}$ व $ध_{२}$ ही समीकाराचीं दोन मूळें असल्यास, र' ची कोणतीहि अर्हा असली तरी

$$ध_{१} ध_{२}=\frac{क}{-क}$$

$$=-१$$

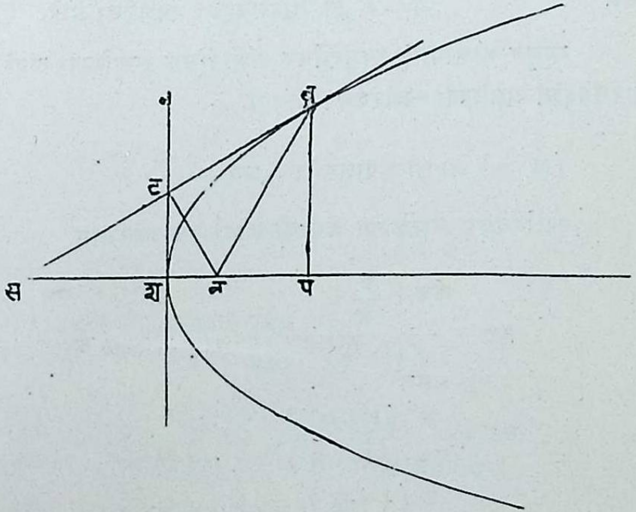
म्हणून (—क, र') बिंदूपासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा एकमेकांस लंब आहेत.

म्हणून नियतेवरील कोणत्याहि बिंदूपासून काढलेल्या स्पर्शरेषा एकमेकांस लंब असतात; किंवा अन्य शब्दांत, एकमेकांस लंब असणाऱ्या स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूचा पथ नियता असते.

८८.८. एकेंद्रावरील कोणत्याहि ब या बिंदूशी असलेल्या स्पर्शरेषेवर न या नाभीपासून काढलेल्या लंबांच्या पादाचा पथ एकेंद्राच्या शिरोबिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा असते. ट बिंदु लंबपाद असेल तर $नट^2=शन\ नब$.

कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र=ध\,य+\frac{क}{ध} \qquad (१)$$



आ. ६५

(क, ०) या नाभींतून जाणाऱ्या आणि (१) ला (लंबणाऱ्या) रषेचा समीकार

$$र = -\frac{१}{ध}(य-क)$$

(१) व (२) या रेषांच्या ट या छेदन बिंदूशीं

$$धय + \frac{क}{ध} = -\frac{१}{ध}(य-क)$$

$$= -\frac{य}{ध} + \frac{क}{ध}$$

किंवा, $य\left(ध + \frac{१}{ध}\right) = ०$

किंवा $य = ०$

पण $य = ०$ ही शिरोबिंदूशीं स्पर्शरेषा आहे.

म्हणून कोणत्याहि स्पर्शरेषेवर नाभीपासून काढलेल्या लंबाचा पाद शिरोबिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर असतो.

(क, ०) या नाभीपासून $र = धय + \frac{क}{ध}$

स्पर्शरेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी नट असल्यास

$$नट = \frac{कध + \frac{क}{ध}}{\sqrt{१+ध^२}}$$

$$\therefore नट^२ = \frac{क^२(१+ध^२)^२}{ध^२(१+ध^२)}$$

$$= \frac{क^२(१+ध^२)}{ध^२}$$

आता, $र = धय + \frac{क}{ध}$ स्पर्शरेषेचा स्पर्शबिंदु, व $\left(\frac{क}{ध^{२}}, \frac{२क}{ध}\right)$ हा आहे.

$$\therefore \quad नब^{२} = \left(\frac{क}{ध^{२}} - क\right)^{२} + \left(\frac{२क}{ध}\right)^{२}$$

$$= क^{२}\left(\frac{१-२ध^{२}+ध^{४}}{ध^{४}}\right) + \frac{४क^{२}}{ध^{२}}$$

$$= क^{२}\left[\frac{१-२ध^{२}+ध^{४}+४ध^{२}}{ध^{४}}\right]$$

$$= \frac{क^{२}(१+ध^{२})^{२}}{ध^{४}}$$

किंवा $\quad नब = \frac{क(१+ध^{२})}{ध^{२}}$

आणि $\quad शन = क$

$$\therefore \quad शन . नब = \frac{क^{२}}{ध^{२}}(१+ध^{२})$$

पण $नट^{२} = \frac{क^{२}}{ध^{२}}(१+ध^{२})$

$$\therefore \quad नट^{२} = शन . नब$$

अन्यथा :— रैखिकीय रीत.

८८·१ या अनुच्छेदावरून

सन=नब,

म्हणून $\triangle$ सनब समद्विभुज आहे.

म्हणून नट हा लंब सब या पायाला दुभागतो.

अर्थात् ट सब चा मध्यबिंदु आहे.

पुन्हा सश = शप (अनु. ८२·१)

म्हणून, श सप चा मध्यबिंदु आहे.

आता ट सब चा मध्यबिंदु आणि श सप चा मध्यबिंदु आहे.

म्हणून शट पब ला समांतर आहे.

परन्तु पब सप ला लंब आहे.

म्हणून शट सुद्धा सप ला लंब आहे.

म्हणून शट ही श या शिरोबिंदूशीं असणारी स्पर्शरेषा आहे; म्हणजेच कोणत्याहि स्पर्शरेषेवर नाभीपासून काढलेल्या लंबाचा पाद शिरोबिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर असतो.

नटब व नशट त्रिकोणांत

$$\angle \text{नशट} = \angle = \text{नटब} \quad १ \text{ लंबकोण}$$

आणि △ सनब समद्विभुज असून नट सब ला लंब असल्यामुळे

$$\angle \text{टनश} = \angle \text{टनब}.$$

म्हणून नशट व नटब हे दोन त्रिकोण समरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{नट}}{\text{नश}} = \frac{\text{नब}}{\text{नट}}$$

$$\therefore \text{नट}^2 = \text{शन} . \text{नब}$$

उदाहरणसंग्रह ११

(१) एकेंद्रावरील कोणत्याहि बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा, त्या बिंदूपासून नियतेवर काढलेल्या लंबाचा पाद नाभीला जोडणाऱ्या रेषेला दुभागते हें सिद्ध करा. (कलकत्ता १९३५)

(२) $(य_१, र_१)$ बिंदूपासून $र^२ = ४कय$ या एकेंद्राला काढलेल्या स्पर्शरेषांची स्पर्शजीवा $र^२ = ४ खय$ या एकेंद्राला स्पर्श करते. तर $(य_१, र_१)$ चा पथ $र^२ = ४ गय$ असून ग, क, ख गुणोत्तर श्रेढींत (geometric progression) आहेत हें सिद्ध करा.

(मुम्बई १९२८)

(३) न एका एकेंद्राची नाभि आहे. म या एका बाह्य बिंदूपासून एकेंद्राला मभ आणि मभ' या दोन स्पर्शरेषा काढल्या. तर मनभ आणि मनभ' हे त्रिकोण समरूप आहेत हें दाखवा. शिवाय, नभ. नभ' = नभ^२ हें सिद्ध करा. (नागपुर १९३०)

(४) $र^२ = ४कय$ या एकेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेवर ब (त,थ) बिंदूपासून काढलेल्या लंबाच्या पादाचा पथ काढा. यावरून, जर ब नाभि असेल तर हा पथ शिरोबिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा होतो हें सिद्ध करा. (आंध १९४१)

(५) एकमेकांस लंब असणाऱ्या एकेंद्राच्या दोन स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदू $(य_१, र_१)$ आणि $(य_२, र_२)$ असल्यास सिद्ध करा की

$य_१य_२ = क_२.,\quad र_१र_२ = -४क^२$ (नागपुर ११४६)

(६) एकेंद्राला अनुलक्षून असलेला ब या एका बिंदूचा ध्रुवीय, वक्राला अशा दोन बिंदूंत छेदतो की एका बिंदूचे अक्षापासूनचें अंतर दुसऱ्या बिंदूच्या अक्षापासूनच्या अंतराच्या दुप्पट आहे. तर ब बिंदु एकतर $२र^२ + कय = ०$ या किंवा $२र^२ = ९कय$ या एकेंद्रावर आहे हें सिद्ध करा. (आंध्र ९९४१)

(७) $र^२ = ४कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून ब बिंदूचा ध्रुवीय या वक्राला प आणि फ बिंदूंत मिळतो. ब बिंदु $तय + थर = द$ रेषेवर असल्यास पफ चा मध्यबिंदु

$$त(र^२ - ४कय) + २क(तय + थर + व) = ०$$

या एकेंद्रावर आहे हें सिद्ध करा. (त्रावणकोर १९४२)

(८) $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेवर शिरोबिंदूपासून काढलेल्या लंबपादाचा पथ $य^2 + र^2 = -\frac{कर^2}{य^2}$ आहे हें सिद्ध करा.

(दिल्ली १९३२)

(९) एखाद्या एकेंद्राच्या ज्या जीवा शिरोबिंदूशीं लंबकोण आपातित करतात त्या जीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ दुसरें एकेंद्र असून दुसऱ्याचें उत्थान पहिल्याच्या उत्थानाच्या निम्में आहे हें सिद्ध करा. शिवाय या सर्व जीवा पहिल्या एकेंद्राच्या अक्षावरील एका स्थिर बिंदूंतून जातात हें सिद्ध करा. (दिल्ली १९३५)

(१०) $र^2 = ४कय$ एकेंद्रावरील $(य_1, र_1)$ आणि $(य_2, र_2)$ बिंदूंशीं असलेल्या स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु (त, थ) असल्यास सिद्ध करा की

$$त = \sqrt{य_1 य_2} \text{ आणि } थ = \frac{र_1 + र_2}{२}.$$ (ब० १९२४)

(११) $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राच्या सर्व स्पर्शरेषांच्या, $र^2 = ४खय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या ध्रुवांचा पथ काढा.

(दिल्ली १९३२)

(१२) एकेंद्राच्या कोणत्याहि समांतरजीवासंहतीवर नाभीपासून काढलेला लंब जीवांना दुभागणाऱ्या व्यासाला नियतेवर मिळतो हें सिद्ध करा.

(नागपुर १९३२)

(१३) $र^2 = ८ य$ या एकेंद्राच्या एका जीवेचा मध्यबिंदु (२, −३) असेल तर त्या जीवेचा समीकार काढा. (नागपुर १९४४)

(१४) एकेंद्रावरील $(कत_1^2, २कत_1)$ बिंदूशीं असलेला अभिलंब वक्राला पुन्हा $(कत_2^2, २कत_2)$ या बिंदूंत मिळतो. तर सिद्ध करा की

$$त_1 त_2 + त_1^2 + २ = ०$$ (नागपुर १९४०)

(१५) मप आणि मफ एकेंद्राच्या स्पर्शरेषा असून पफ रेषा अक्षाला ट

बिंदूंत छेदते. तर ट चें नाभीपासूनचें अंतर म च्या नियतेपासूनच्या अंतरासमान आहे हें सिद्ध करा.

(१६) ब या कोणत्याहि बिंदूपासून $र^२=४कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या त्याच्या ध्रुवीयावर लंब काढला. तर या लंबपादाचें नाभीपासूनचें अंतर ब बिंदूच्या नियतेपासूनच्या अंतरासमान आहे हें सिद्ध करा.

(१७) फ, फ, ब हे एकेंद्रावरील तीन बिंदू आहेत अणि पफ ही जीवा ब मधून जाणाऱ्या व्यासाला ह बिंदूंत छेदते. या व्यासावर $पप'$ $फफ'$ या कोटि काढल्या. तर सिद्ध करा की

$$बप' . बफ' = बह^२$$

(१८) एकेंद्रावरील प आणि फ बिंदूंशी असलेल्या स्पर्शरेषा स बिंदूंत मिळत असतील तर सिद्ध करा की,

(१) सप आणि सफ न नाभीशीं समान कोण करतात.

(२) $नस = नप . नफ$

(३) नपस व नसफ हे त्रिकोण सपरूप आहेत.

(१९) एकेंद्राच्या तीन स्पर्शरेषांमुळे निर्माण झालेल्या त्रिकोणाचें परिवृत्त नेहमी नाभीतून जातें हें सिद्ध करा.

(२०) एकेंद्राच्या बभ जीवेचा ध्रुव स आहे. तर एकेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेवर ब, स आणि भ बिंदूंपासून काढलेले लंब गुणोत्तर-श्रेढींत आहेत हें सिद्ध करा.

(२१) $र^२=४कय$ या एकद्राची एक जीवा शिरोबिंदूशीं लंबकोण आपातित करीत असेल तर त्या जीवेच्या टोकांशीं असलेल्या स्पर्शरेषा $य+४क=०$ या रेषेवर मिळतात हें सिद्ध करा.

एकेंद्र-संकीर्ण प्रश्न

उदाहरणसंग्रह १२

(१) एकेंद्रावरील दोन बिंदूंशीं असलेल्या अभिलंबांचा छेदनबिंदु वक्रावर असेल तर या दोन बिंदूंच्या कोटींचा गुणाकार ८क^{२} आहे हें सिद्ध करा. (मद्रास १९४१)

(२) र^{२}=४कय या एकेंद्राच्या ज्या जीवेच्या टोकांचीं नाभ्यंतरें २ : १ या प्रमाणांत आहेत त्या जीवेच्या मध्यबिंदूंचा पथ ९(र^{२}−२कय)^{२}=४क^{२}(२य−क)(४य+क) हा आहे हें सिद्ध करा. (बनारस १९२४)

(३) र=धय+ग ही रेषा र^{२}=४कय या एकेंद्राचा अभिलंब होण्याकरिता प्रतिबंध कध^{३}+२कध+ग=० हा आहे हें दाखवा. यावरून किंवा अन्यथा र=धय+ग ही रेषा (र−ई)^{२}= ४क (य−इ) या एकेंद्राचा अभिलंब होण्याकरिता प्रतिबंध काढा.

र^{२}=१२य+६र+३ या एकेंद्राचा य+र=० या रेषेला समांतर असलेला अभिलंब काढा. (मुम्बई १९४१)

(४) र^{२}=४कय या एकेंद्राच्या दोन स्पर्शरेषा य-अक्षाशीं ऊ आणि ऊ′ हे कोण करतात. कोस्प ऊ−कोस्प ऊ′=२ असेल तर त्यांच्या छेदनबिंदूचा पथ काढा. (दिल्ली १९३५)

(५) र^{२}=४कय या एकेंद्राच्या नाभिजीवेच्या टोकांशीं असलेल्या अभिलंबांच्या छेदनबिंदूचा पथ काढा. (त्रावणकोर १९४३)

(६) र^{२}=४कय या एकेंद्राच्या ज्या स्पर्शरेषांमधील कोण 'अ' आहे त्या स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूचा पथ र^{२}+(य−क)^{२}=(य+क)^{२} व्युत्कोज्या^{२}अ हा आहे हें दाखवा. (मैसूर १९३८)

(७) $र^2 = ४खय$ या एकेंद्राची एक स्पर्शरेषा $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राला प आणि फ बिंदूंत मिळते. तर पफ च्या मध्यबिंदूचा पथ $र^2(२क+ख) = ४क^2य$ आहे हें सिद्ध करा. (मैसूर १९३७)

(८) (९, ५) या स्थिर बिंदूमधून $र^2 = ६य$ या एकेंद्राच्या जीवा काढल्या. तर त्या जीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ $र^2 - ५र - ३य + २७ = ०$ हा आहे हें सिद्ध करा.

(मद्रास १९४२)

(९) $र = ४कय$ या एकेंद्राच्या ज्या जीवांचे ध्रुव $र = धय$ या रेषेवर आहेत त्या जीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ काढा.

(आंध्र १९४२)

(१०) पनफ ही एकेंद्राची एक नाभिजीवा आहे. पफ चा लंबद्विभाजक अक्षाला ट बिंदूंत छेदतो. तर पफ = २नट हें सिद्ध करा.

(आंध्र १९४२)

(११) $र^2 = ४कय$ या एकेंद्रावरील प आणि फ बिंदूंशीं असलेल्या स्पर्शरेषा एकमेकांशीं लंबकोण करून र–अक्षाला अनुक्रमें च आणि छ बिंदूंत मिळतात. पच रेषा र–अक्षाशीं ऊ कोण करीत असल्यास सिद्ध करा की $\frac{पच}{फछ} = स्प^3 ऊ$

(१२) एकेंद्रावरील तीन बिंदू जोडून तयार झालेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ त्या तीन बिंदूंशीं काढलेल्या स्पर्शरेषांनी बनलेल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट असतें हें सिद्ध करा.

(१३) $र^2 = ४कय$ या एकेंद्राच्या नियतेवरील बिंदूंपासून काढलेल्या सर्व स्पर्शरेषांच्या मध्यबिंदूंचा पथ $र^2(२य+क) = क(३य+क)^2$ आहे हें सिद्ध करा.

(१४) एकेंद्राच्या नाभिजीवा व्यास धरून काढलेलीं सर्व वृत्तें त्याच्या नियतेला स्पर्श करतात आणि नाभित्रिज्या व्यास धरून

काढलेलीं सर्व वृत्तें शिरोबिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेला स्पर्श करतात हें सिद्ध करा.

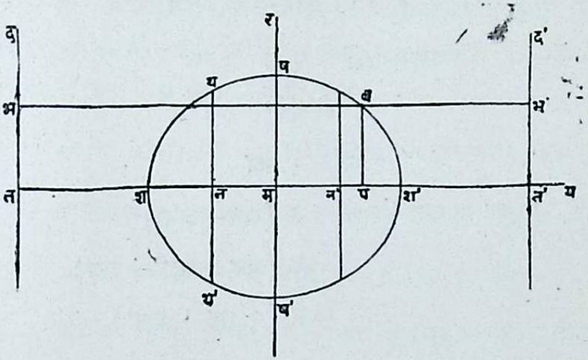
(१५) $र^२=४कय$ या एकेंद्राच्या श या शिरोबिंदूंतून जाणाऱ्या शप आणि शफ या दोन जीवा आहेत. आणि शप व शफ व्यास धरून काढलेलीं वृत्तें ब बिंदूंत छेदतात. प आणि फ शीं असलेल्या स्पर्शरेषांनी आणि शब रेषेने अक्षाशीं केलेले कोण अ, आ आणि ऊ असल्यास सिद्ध करा की

$$कोस्प\ अ + कोस्प\ आ + २स्प\ ऊ = ०$$

प्रकरण ७ वें

ऊनेन्द्र

८९. या शांकवाची उत्केंद्रता एक पेक्षा कमी असते.



आ. ६६

न ही ऊनेंद्राची नाभि असून नत हा न पासून तद या नियतेवर काढलेला लंब आहे.

नत रेषेचें श बिंदूशीं अंतरतः, आणि श' बिंदूशीं बाह्यतः उ : १ या निष्पत्तींत भाजन करा.

$$\therefore \quad \frac{\text{नश}}{\text{शत}} = \text{उ}$$

किंवा $\text{नश} = \text{उ} . \text{शत}$ (१)

आणि $$\frac{\text{नश}'}{\text{श}'\text{त}} = \text{उ}$$

किंवा $\text{नश}' = \text{उ} . \text{श}'\text{त}$ (२)

म्हणज, श किंवा श' या बिंदूचे न पासूनचें अंतर त्या बिंदूच्या तद या रेषेपासूनच्या अंतराच्या उ पट आहे. म्हणून श आणि श' हे दोन्ही बिंदू अनु० ६९ वरून वक्रावर आहेत.

शश' ची लांबी २ क ने दर्शविली जाते. म हा शश' चा मध्य बिंद आहे. (१) व (२) चा योग करून

$$\begin{aligned} नश + नश' &= २\ क \\ &= शश' \\ &= २\ मश \end{aligned}$$

पुन्हा

$$\begin{aligned} नश + नश' &= उ\ (शत + श'त) \\ &= उ\ (शत + शश' + शत) \\ &= उ\ (२\ शत + शश') \\ &= उ\ (२\ शत + २\ मश) \\ &= २\ उ\ (शत + मश) \\ &= २\ उ\ मत \end{aligned}$$

$$\therefore \quad मश = उ\ .\ मत$$

किंवा $$क = उ\ .\ मत$$

किंवा $$मत = \frac{क}{उ} \qquad (३)$$

(२) मधून (१) चा वियोग करून,

$$उ\ (श'न - शत) = नश' - नश$$

किंवा $$उ\ (श'श + शत - शत)$$

$$= (नम + मश') - (मश - मन)$$

किंवा $उ\ .\ शश' = २\ नम$, (कारण $मश' = मश$)

किंवा $२ उ . क = २ मन$

$\therefore \quad मन = क . उ$. (४)

१०. ऊनेंद्राचा समीकार

मागील अनुच्छेदाच्या आकृतींत दर्शविल्याप्रमाणे, म हा मूलबिंदु, मश' रेषा ही य—अक्ष, आणि म बिंदूतून जाणारी व शश' ला लंब असणारी मष रेषा हा र—अक्ष घ्या.

समजा की ब (य, र) हा वक्रावरील कोणताहि बिंदु आहे.

ब पासून तद या नियतेवर बभ, आणि शश' वर बप, हे लंब काढा.

आता न या नामीचे याम (—कउ,०) आहेत.

आणि ब हा वक्रावरील कोणताहि बिंदु असल्यामुळे त्याचे याम

$$नब^२ = उ^२ . बभ^२ \qquad (१)$$

या संबंधाचें समाधान करतात.

$$पण \quad नब^२ = नप^२ + पब^२$$

$$= (नम + मप)^२ + पब^२$$

$$= (य + कउ)^२ + २ग$$

$$आणि \quad बभ = पत$$

$$= तम + मप$$

$$= \frac{क}{उ} + य$$

$$\therefore \quad बभ^२ = \left(य + \frac{क}{उ}\right)^२$$

(१) मधे $नब^2$ व $बभ^2$ यांच्या अर्हांचा आदेश करून

किंवा $(य+कउ)^2+र^2 = उ^2\left(य+\frac{क}{उ}\right)^2$

$$य^2+र^2+२कउय+क^2उ^2 = उ^2य^2+२कउय+क^2$$

किंवा $(१-उ^2)\,य^2+र^2 = क^2\,(१-उ^2)$

यांस $क^2\,(१-उ^2)$ ने साद्यंत भागून,

$$\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{क^2(१-उ^2)}=१ \qquad (२)$$

वक्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूच्या यामांनी समीकार (२) चें समाधान होतें म्हणून तो वक्राचा समीकार होतो.

हा वक्र र–अक्षास म्हणजेच $य = ०$ ला ज्या बिंदूंत मिळतो त्या बिंदूंचे र– याम

$$\frac{र^2}{क^2(१-उ^2)}=१$$

किंवा $$र = \pm क\sqrt{१-उ^2}$$

या संबंधाने मिळतात.

र–अक्ष वक्राला ज्या बिंदूंत छेदतो त्याचे याम

$(०, क\sqrt{१-उ^2})$ व $(०, -क\sqrt{१-उ^2})$ आहेत.

हे बिंदू आकृतींत ष आणि ष′ यांनी दर्शविले असून ते म च्या विरुद्ध बाजूस आहेत.

$उ < १$ असल्यामुळे, $\sqrt{१-उ^2}$ ही वास्तविक राशी आहे. म्हणून ष व ष′ हे बिंदू नेहमी वास्तविक असतात.

मष आणि मष यांच्या लांबींचे संख्यात्मक मान प्रत्येकीं $क\sqrt{१-उ^2}$ आहे.

$$\therefore \text{मष}^2 = \text{क}^2 (१ - \text{उ}^2)$$
$$= \text{क}^2 - \text{क}^2\text{उ}^2$$
$$= \text{मश}^2 - \text{मन}^2 \text{ (कारण मश = क व मन = क उ)}$$

मष ची लांबी 'ख' ने दर्शविल्यास

$$\text{ख}^2 = \text{क}^2 (१ - \text{उ}^2)$$

म्हणून समीकार (२) प्रमापरूपांत पुढीलप्रमाणे लिहिता येतो.

$$\frac{\text{य}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{ख}^2} = १ \qquad (३)$$

९१. $\frac{\text{य}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{ख}^2} = १$ हा समीकार

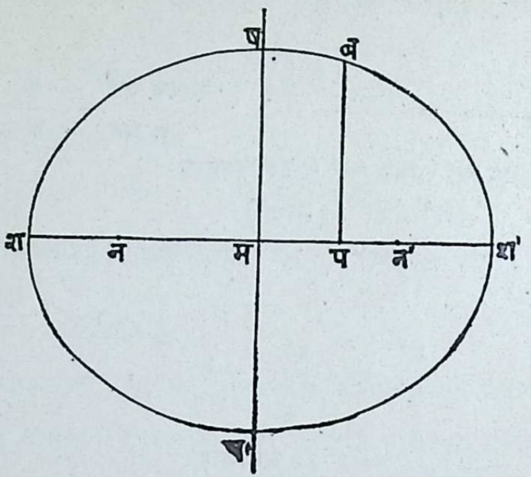
$$\frac{\text{र}^2}{\text{ख}^2} = १ - \frac{\text{य}^2}{\text{क}^2}$$
$$= \frac{\text{क}^2 - \text{य}^2}{\text{क}^2}$$
$$= \frac{(\text{क} + \text{य})(\text{क} - \text{य})}{\text{क}^2} \qquad (१)$$

असाहि लिहितां येतो.

आता वक्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदचे याम (य, र) असल्यामुळे आकृतीवरून व (१) वरून $\frac{\text{बप}^2}{\text{ख}^2} = \frac{\text{शप. पश}'}{\text{क}^2}$

किंवा $\frac{\text{बप}^2}{\text{शप. पश}'} = \frac{\text{षम}^2}{\text{शम}^2}$.

श, श$'$ बिंदूंना वक्राचे शिरोबिंदू, शश$'$ ला प्रधान अक्ष (major axis) षष$'$ ला गौण अक्ष (minor axis)



आ. ६७

आणि म या बिंदूला वक्राचें केंद्र म्हणतात.

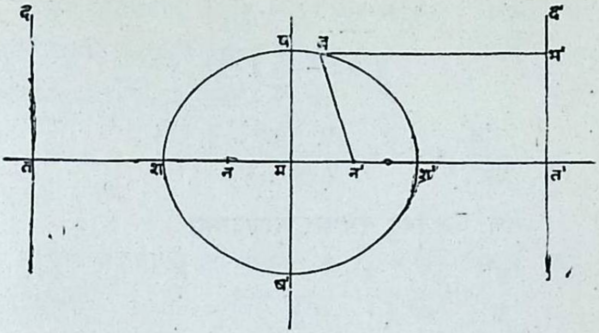
प्रधान अक्ष व गौण अक्ष यांच्या लांबी अनुक्रमें २क व २ख आहेत. म्हणून क व ख हे अनुक्रमें सामिप्रधान अक्ष (semi major axis) व सामिगौणअक्ष (semi minor axis) यांच्या लांबी दर्शवितात.

१२. ऊनेंद्राला दुसरी नाभि आणि तिच्याशीं संवादी अशी दुसरी नियता असते हें सिद्ध करणें.

मूलबिंदूच्या धन दिशेला य—अक्षावर न' व त' हे बिंदू असे घ्या की

$$मन = मन' = क . उ$$

$$आणि\ मत = मत' = \frac{क}{उ}$$



आ. ६८

$त'द'$ $तत'$ ला लंब आणि $बभ'$ $त'द'$ ला लंब काढा. $न'$ व $त$ चे याम अनुक्रमें (क उ, ०) व $\left(\frac{क}{उ}, ०\right)$ आहेत.

$त'$ $द'$ रेषेचा समीकार

$$य = \frac{क}{उ}$$

किंवा $य - \frac{क}{उ} = ०$

म्हणून, ब (य, र) या बिंदूपासून $त'$ $द'$ या रेषेवर काढलेल्या $बभ'$ या लंबाचें संख्यात्मक मान $\left(य - \frac{क}{उ} \right)$ आहे.

$$न' \; ब = \sqrt{(य - कउ)^2 + र^2} \qquad \text{(संख्येने)}$$

$$\therefore \frac{न' \; ब}{ब \; भ'} = \frac{\sqrt{(य - कउ)^2 + र^2}}{\left(य - \frac{क}{उ} \right)}$$

$$\frac{न'ब^2}{ब'भ'^2} = \frac{(य - कउ)^2 + र^2}{\left(य - \frac{क}{उ}\right)^2}$$

$$\frac{न'ब^2}{बभ'^2} = \frac{\{उ^2 \ (य - कउ)^2 + र^2\}}{(उय - क)^2}$$

पण ब बिंदु वक्रावर असल्यामुळे

$$\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{क^2 \ (१ - उ^2)} = १$$

किंवा $$\frac{र^2}{क^2 \ (१ - उ^2)} = १ - \frac{य^2}{क^2}$$

किंवा $$र^2 = क^2 \ (१ - उ^2) \left[१ - \frac{य^2}{क^2} \right]$$

$$= क^2 \ (१ - उ^2) - (१ - उ^2) य^2$$

$$\therefore \quad \frac{न' ब^2}{ब भ'^2} = \frac{उ^2 [\ (य - कउ)^2 + क^2 (१ - उ^2) - (१ - उ^2) य^2]}{(उय - क)^2}$$

$$= \frac{उ^2 [य^2 - २ \ कउय + क^2उ^2 + क^2 - क^2उ^2 - य^2 + य^2उ^2]}{(उय - क)^2}$$

$$= \frac{उ^2 [उ^2य^2 - २ \ कउय + क^2]}{(उय - क)^2}$$

$$= \frac{उ^2 \ (उय - क)^2}{(उय - क)^2}$$

$$= उ^2$$

$$\therefore \quad \frac{न'ब}{बभ'} = उ$$

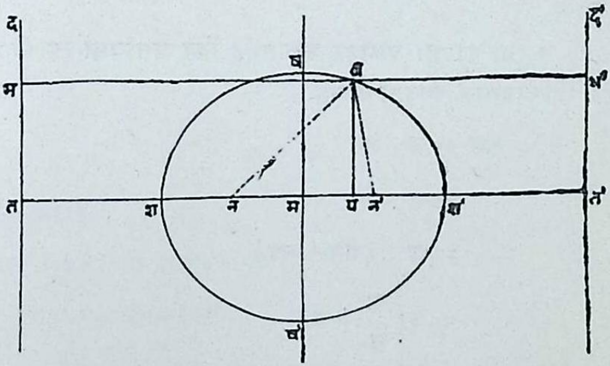
ही निष्पति धन घेतली आहे, कारण न'ब व बभ' यांच्या केवळ लांबीशीच आपणांस कर्तव्य आहे.

म्हणून वक्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूचा गुणधर्म असा आहे की त्याचें न' बिंदूपासूनचें अंतर त्याच्या त'द' या स्थिर रेषेपासूनच्या अंतराच्या नेहमी उ-पट असतें.

यावरून न' बिंदु व त'द' रेषा सुद्धा वक्राची नाभि व नियता होतात.

म्हणून वक्राला दुसरी नाभि व तिच्याशीं संवादी अशी दुसरी नियता असते.

९३. वक्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूच्या नाभ्यंतरांचा योग त्याच्या प्रधान अक्षासमान असतो.



आ. ६९

आकृतीवरून

नब = उ . बभ

आणि न'ब = उ . बभ'

∴ नब + न'ब = उ (बभ + बभ')

∴ नब + न'ब = उ भभ'

$$= उ \cdot तत'$$

$$= २ उ \cdot मत.$$

पण $$मत = \frac{क}{उ}$$

$$\therefore \quad नब + न'ब = २ उ \cdot \frac{क}{उ}$$

$$= २क$$

$$= \text{प्रधान अक्ष}$$

म्हणून इष्ट प्रमेय.

अन्यथा :—

ब (य, र) हा वक्रावर कोणताहि बिंदु असल्यास त्याचीं नाभ्यंतरें पुढे दिल्याप्रमाणे काढतां येतात.

$$नब = उ \cdot बभ$$

$$= उ \cdot पत$$

$$= उ \cdot (मत + मप)$$

$$= उ\left(\frac{क}{उ} + य\right)$$

$$= क + उ \cdot य.$$

आणि $$न'ब = उ \cdot बभ'$$

$$= उ \cdot पत'$$

$$= उ \,(मत' - भप)$$

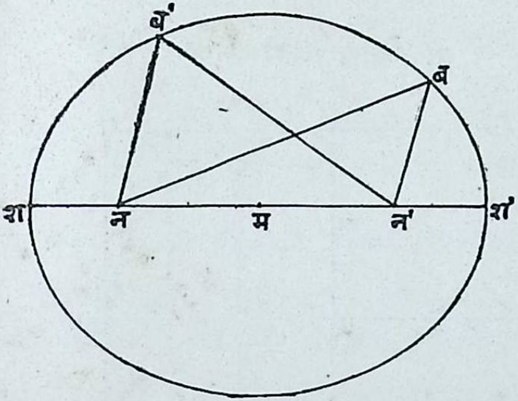
$$= उ\left(\frac{क}{उ} - य\right)$$

$$= क - उ \cdot १.$$

वरील समीकारांचा योग करून

∴ नब+न'ब=२ क=प्रधान अक्ष.

९४. ऊनेंद्राची यांत्रिकीय (mechanical) रचना



आ. ७०

आकृतीवरून,

नब्र+न'ब=शश'

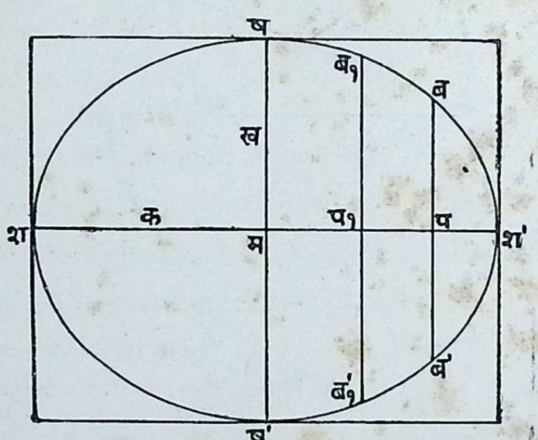
नब'+न'ब'=शश'

ऊनेंद्रावरील कोणत्याहि बिंदूच्या नाभ्यंतरांचा योग अचल असून त्याच्या प्रधान अक्षासमान असतो या गुणधर्माचा उपयोग करून ऊनेंद्राची यांत्रिकीय रीतीने रचना करतां येते.

इष्ट ऊनेंद्राच्या प्रधान अक्षाइतका लांब असलेला दोऱ्याचा एक तुकडा घेऊन त्याचीं दोन मोकळीं टोकें न आणि न' बिंदूंशीं बांधा. हेच दोन बिंदू ऊनेंद्राच्या नाभी होतील. पेन्सिलचें टोक दोऱ्याला स्पर्श करील आणि दोऱ्याचे दोन्ही भाग नेहमी ताठ राहतील अशा रीतिने

ते कागदावर फिरवा. आता पेन्सिलचें टोक नेहमी अशा स्थितींत असतें की न' व' न' पासून असलेल्या त्याच्या
अंतरांचा योग अचल असतो. म्हणून त्या टोकाने काढलेला वक्र इष्ट ऊनेंद्र होईल.

९५ $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या वक्राचें अनुरेखण करणें



आ. ७१

$$\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$$ हा समीकार

$$र=\pm ख\sqrt{१-\frac{य^2}{क^2}} \quad (१)$$

अथवा $$य=\pm क\sqrt{१-\frac{र^2}{ख^2}} \quad (२)$$

असा लिहितां येतो.

म्हणून ज्या बिंदूंचे याम वरील दोन्ही समीकारांपैकी कोणत्याहि एकाचें समाधान करतात ते बिंदू वक्रावर असतात.

आता संख्येने $य > क$ असल्यास

$$य^२ > क^२$$

किंवा $$\frac{य^२}{क^२} > १$$

म्हणून करणीचिन्हांतील $१ - \frac{य^२}{क^२}$ ही राशी ऋण आहे.

∴ य च्या अशा अर्हांकरिता, समीकार (१) मधील $\pm ख \sqrt{१ - \frac{य^२}{क^२}}$ ही राशी काल्पनिक होईल आणि म्हणून य च्या ह्या अर्हांकरिता र च्या कोणत्याहि वास्तविक अर्हा मिळणार नाहीत.

त्याचप्रमाणे समीकार (२) वरून, $र > ख$ किंवा $< -ख$ असल्यास य ची कोणतीहि वास्तविक अर्हा मिळणार नाही.

∴ वक्राचा कोणताहि भाग $य = \pm क$ व $र = \pm ख$ या या रेषांच्या बाहेर राहूं शकत नाही. तो पूर्णपणे $य = क$; $य = -क$; $र = ख$; $र = -ख$ या चार रेषांनी तयार झालेल्या आयतांत राहतो.

आता $-क$ व $+क$ मध्ये असणाऱ्या य च्या अर्हांकरिता $१ - \frac{य^२}{क^२}$ ही राशी धन आहे.

किंवा $ख \sqrt{\frac{१ - य^२}{क^२}}$ ही वास्तविक आहे.

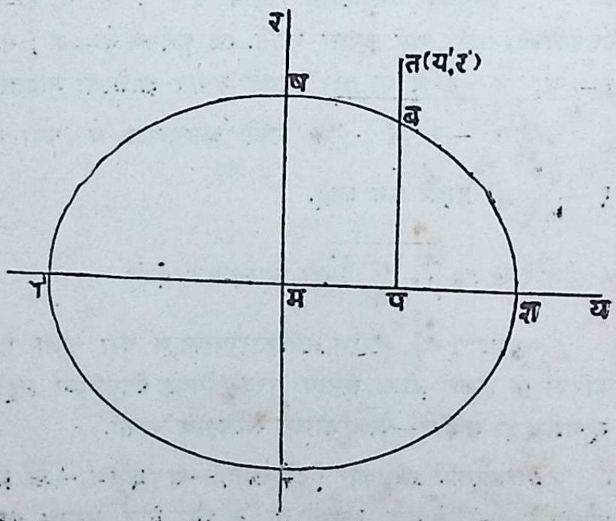
म्हणून (१) मधील समीकारावरून य च्या अशा प्रत्येक अर्हे-करिता र च्या दोन समान परंतु विरुद्ध चिन्हांच्या अर्हा मिळतात म्हणजेच हा वक्र य—अक्षाभोवती संमितीय असतो.

त्याचप्रमाणे समीकार (२) वरून, $-ख$ आणि $+ख$ मध्ये असणाऱ्या र च्या प्रत्येक अर्हेकरिता, य च्या दोन समान परंतु विरुद्ध

चिन्हांच्या अर्हा मिळतात, म्हणजेच हा वक्र र—अक्षाभोवतीहि संमितीय असतो.

आता य च्या कितीहि अर्हा घेतल्या व त्यांच्याशीं संवादी असलेल्या र च्या अर्हा ठरविल्या तर या अर्हा ज्यांचे याम आहेत अशा बिंदूंची एक श्रेढी आपल्याला मिळते. या सर्व बिंदूंचें अनुरेखण केलें असतां असें आढळून येईल की हे सर्व बिंदू आकृतींत दाखविलेल्या आकाराच्या एका वक्रावर आहेत.

९६. $\frac{य'^2}{क^2}+\frac{र'^2}{ख^2}-१$ ही राशी ऋण, शून्य किंवा धन असेल तदनुसार ($य', र'$) हा बिंदु $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या ऊनेंद्राच्या आंत, वर किंवा बाहेर असतो.



आ. ७२

समजा त (य', र') हा दिलेला बिंदु आहे. तप ही कोटि $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊर्नेंद्राला ब बिंदूंत छेदते. समजा (य',र'') हे ब चे याम आहेत. आता ब (य', र'') हा बिंदु $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊर्नेंद्रावर असल्यामुळे,

$$\frac{य'^२}{क^२}+\frac{र''^२}{ख^२}=१$$

किंवा $$\frac{र''^२}{ख^२}=१-\frac{य'^२}{क^२}$$

आकृतीवरून

तप $\lesseqgtr$ बप असेल

तदनुसार त बिंदु ऊर्नेंद्राच्या आंत, वर किंवा बाहेर राहील.

म्हणून $र' \lesseqgtr र''$ असेल

किंवा $\frac{र'^२}{ख^२} \lesseqgtr \frac{र''^२}{ख^२}$,,

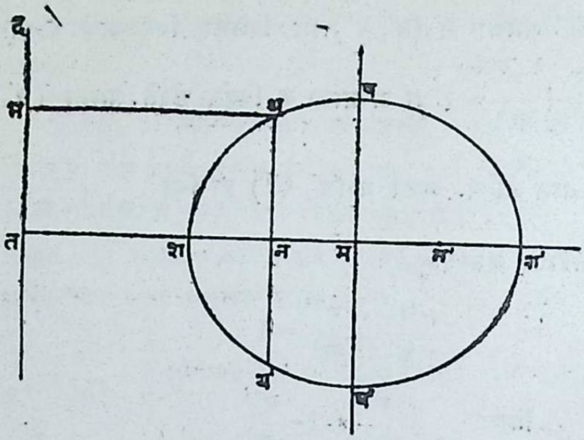
किंवा $\frac{र'^२}{ख^२} \lesseqgtr १-\frac{य'^२}{क^२}\left(\because \frac{र''^२}{ख^२}=१-\frac{य'^२}{क^२}\right)$ असेल

किंवा $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र'^२}{ख^२}-१ \lesseqgtr ०$ असेल

तदनुसार त बिंदु ऊर्नेंद्राच्या आंत, वर किंवा बाहेर राहील.

९७. $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊर्नेंद्राचें उत्थान

थनथ' ही न या नाभींतून काढलेली द्विगुण कोटि आहे.



आ. ७३

ऊर्नेद्राच्या परिभाषेवरून

सामिउत्थान नथ = उ. (थ चें तद या नियतेपासून अतर)

$$= उ . नत.$$

$$= उ \; (मत - मन)$$

$$नथ = उ \left(\frac{क}{उ} - कउ \right)$$

$$= क - क \, उ^2$$

$$= क \; (१ - उ^2)$$

परंतु $$ख^2 = क^2 \; (१ - उ^2)$$

किंवा $$१ - उ^2 = \frac{ख^2}{क^2}$$

$$\therefore \quad नथ = क . \frac{ख^2}{क^2}$$

$$= \frac{ख^2}{क}$$

अन्यथा:—

थनथ' या रेषेचा समीकार

$$य = -क\,उ$$

अथवा $य + कउ = ०$

ही रेषा $\frac{य^{२}}{क^{२}} + \frac{र^{२}}{ख^{२}} = १$ या वक्राला थ व थ' बिंदूंत छेदते.

त्यांचे कोटि नथ = र ने दिले जातात.

आता $\frac{र^{२}}{ख^{२}} = १ - \frac{य^{२}}{क^{२}}$

$$= १ - \frac{क^{२}\,उ^{२}}{क^{२}}$$

$$= १ - उ^{२}$$

किंवा $र = ख^{२}\,(१ - उ^{२})$

परंतु $ख^{२} = क^{२}\,(१ - उ^{२})$

$\therefore$ $र^{२} = ख^{२}\,\frac{ख^{२}}{क^{२}}$

$$= \frac{ख^{४}}{क^{२}}$$

$\therefore$ $र = \pm \frac{ख^{२}}{क}$

म्हणून नथ अथवा नथ' ची लांबी $= \frac{ख^{२}}{क}$

उदाहरणसंग्रह १३, ऊनेंद्र.

(१) (१) $९ य^२ + ४ र^२ = ३६$

(२) $४ य^२ + ९ र^२ = ३६$

या वक्रांचे अनुरेखण करून त्यांची उत्केंद्रता, नाभींचे याम आणि साभिउत्थानाची लांबी काढा. (नागपूर १९३०)

(२) न नाभि 'मूलबिंदु' आणि प्रधान व गौण अक्ष हे यामाक्ष घेऊन ऊनेंद्राचा समीकार काढा.

(३) $४ य^२ + ३ र^२ = २४$ या ऊनेंद्राच्या नियतांचे समीकार आणि त्याच्या नाभी व शिरोबिंदू यांचे याम काढा. (दिल्ली १९३२)

(४) $\frac{१}{२}$ उत्केंद्रता असणाऱ्या ऊनेंद्राच्या नाभी (४,७) व (१०,०) आहेत. तर त्याचा समीकार

$$३ य^२ + ४ र^२ - ४२ य + ३९ = ०$$

हा आहे हें दाखवा. (मुंबई १९२८)

(५) $य + र = ०$ ही रेषा एका ऊनेंद्राची नियता असून (२,२) ही त्याची संवादी नाभि आहे. ऊनेंद्राची उत्केंद्रता $\frac{१}{३}$ असल्यास त्याच्या दुसऱ्या नियतेचा समीकार $य + र = ९$ आहे हें दाखवा.

(बनारस १९४१)

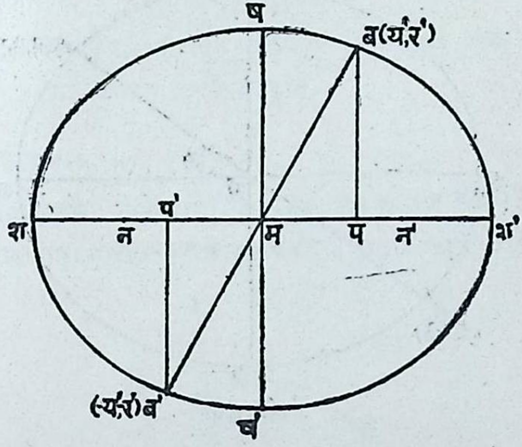
(६) (४,−३), (२,५), (०, १०), (२, ११) यांपैकी प्रत्येक बिंदु $५ य^२ + १६ र^२ = १६००$ या ऊनेंद्राच्या आंत आहे की बाहेर आहे तें सांगा.

९८. परिभाषा

शांकवाचें केंद्रः –जर एका बिंदूंतून जाणाऱ्या एखाद्या शांकवाच्या सर्व जीवा त्या बिंदूंत दुभागल्या जात असतील तर त्या बिंदूला त्या शांकवाचें केन्द्र म्हणतात.

केंद्र असणाऱ्या शांकवास केंद्रीय शांकव म्हणतात.

$\frac{य^२}{क^२} + \frac{र^२}{ख^२} = १$ या ऊनेंद्राचें केंद्र मूलबिंदु आहे हें सिद्ध करणें.



आ. ७४

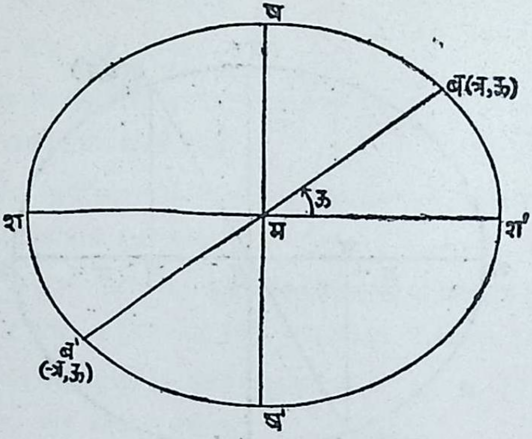
ब (य', र') बिंदु ऊनेंद्रावर असल्यास $\frac{य'^२}{क^२} + \frac{य'^२}{ख^२} = १$ (१)

हा समीकार $\frac{(-य')^२}{क^२} + \frac{(-र')^२}{ख^२} = १$ असाहि लिहितां येतो. म्हणून (−य', −र') बिंदूहि त्याच ऊनेंद्रावर असतो.

आता या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या जीवेचा मध्यबिंदु मूलबिंदु आहे.

पण (य', र') हा वक्रावरील कोणताहि बिंदु आहे. म्हणून मूलबिंदूतून जाणाऱ्या ऊनेंद्राच्या सर्व जीवा मूलबिंदूशीं दुभागल्या जातात. केंद्राच्या परिभाषेवरून $\frac{य^२}{क^२} + \frac{र^२}{ख^२} = १$ या ऊनेंद्राचें केंद्र मूलबिंदु आहे. या गुणधर्मामुळे ऊनेंद्र केंद्रीय शांकव आहे असें दिसून येते.

९८.१ केंद्रापासून दिलेल्या दिशेने काढलेल्या सदिश त्रिज्येची लांबी काढणें.



आ. ७५

$$\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$$ या समीकाराचें ध्रुवीय रूपांत रूपांतर करून,

$$\frac{त्र^2 \text{ कोज्या}^2 ऊ}{क^2}+\frac{त्र^2 \text{ ज्या}^2 ऊ}{ख^2}=१$$

किंवा, $$त्र^2=\frac{क^2 ख^2}{ख^2 \text{ कोज्या}^2 ऊ + क^2 \text{ ज्या}^2 ऊ}$$

किंवा, $$त्र^2=\frac{क^2 ख^2}{ख^2+(क^2-ख^2) \text{ ज्या}^2 ऊ} \qquad (१)$$

अक्षाशीं ऊ कोण करीत असलेल्या सदिश त्रिज्येची लांबी समीकार (१) ने मिळते.

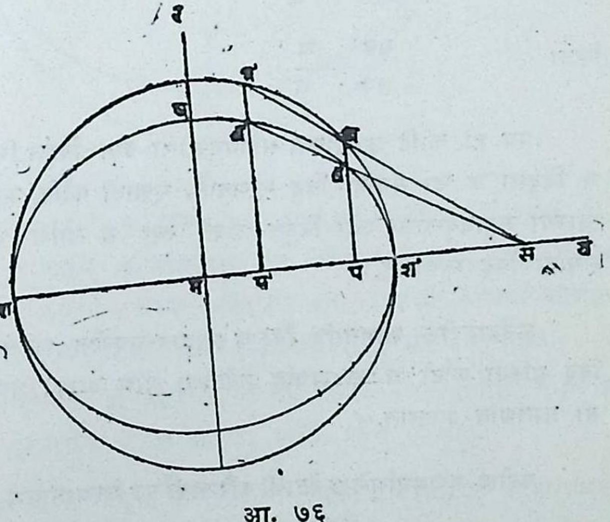
आता $क^2>ख^2$ असल्यामुळे ऊ चें मान कोणतेंहि असलें तरी समीकार (१) च्या दक्षिणपक्षास असलेली राशी नेहमी धन असते.

म्हणून ऊ च्या प्रत्येक अर्हेकरिता त्र च्या दोन समान पण विरुद्ध चिन्हांच्या अर्हा मिळतात म्हणजे, केंद्रातून जाणारी कोणतीहि रेषा वक्राला केंद्रापासून समदूर परंतु विरुद्ध दिशेंत असणाऱ्या दोन बिंदूंत मिळते.

यावरून, केंद्रातून जाणाऱ्या ऊनेंद्राच्या सर्व जीवा केंद्राशीं दुभागल्या जातात हें सिद्ध होतें.

९९. परिभाषा :—

सहायवृत्त :— एखाद्या ऊनेंद्राचा प्रधान अक्ष शश' हा व्यास धरून काढलेल्या वृत्ताला त्याचें सहायवृत्त (auxiliary circle) म्हणतात.



आ. ७६

ऊनेंद्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूची बप ही कोटि आहे. पब वाढवून तिला सहायवृत्ताला भ बिंदूंत मिळूं द्या. भप ही त्या वृत्तावरील भ या बिंदूची कोटि होईल.

आतां रेखिकीने

$$भप^2 = शप . पश' \qquad (१)$$

आणि ९१ व्या अनुच्छेदाने

$$\frac{बप^2}{शप . पश'} = \frac{षम^2}{शम^2}$$

$$= \frac{ख^2}{क^2} \qquad (२)$$

(१) वरून शप. पश' चा आदेश करून

$$\frac{बप^2}{भप^2} = \frac{ख^2}{क^2}$$

किंवा

$$\frac{बप}{भप} = \frac{ख}{क}$$

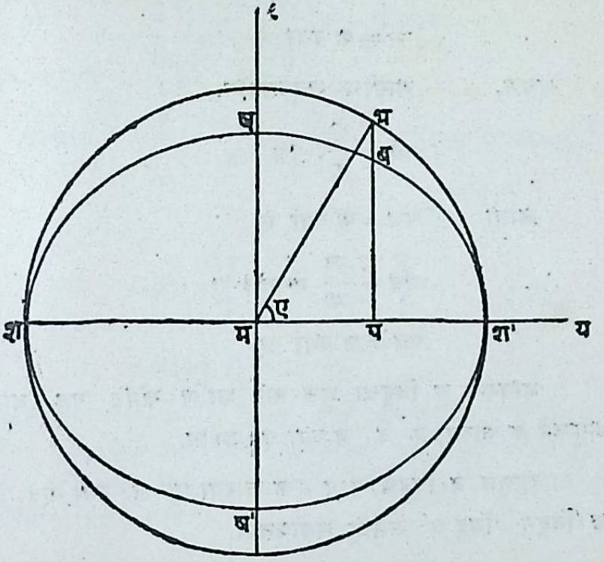
पब ही कोटि ऊनेंद्राच्या सहायवृत्ताला ज्या बिंदूंत मिळते त्या भ बिंदूला ब चा संवादी बिंदु म्हणतात. एखादी कोटि ऊनेंद्राला व त्याच्या सहायवृत्ताला ज्या बिंदूंत छेदते त्या ब आणि भ बिंदूंना संवादी बिंदू म्हणतात.

ऊनेंद्रावरील कोणताहि बिंदु व सहायवृत्तावरील त्याचा संवादी बिंदु यांच्या कोटी ख : क अर्थात् ऊनेंद्राचा गौण अक्ष : प्रधान अक्ष, या प्रमाणांत असतात.

वरील गुणधर्मामुळे ऊनेंद्राची परिभाषा पुढे दिल्याप्रमाणे देतां येते.

एखाद्या वृत्तावरील प्रत्येक बिंदूपासून त्याच्या कोणत्याहि व्यासावर काढलेल्या लंबाचें दिलेल्या निष्पत्तींत भाजन करणाऱ्या बिंदूंचा पथ एक ऊनेंद्र असतें आणि दिलेलें वृत्त हें त्या ऊनेंद्राचें सहायवृत्त असतें.

१००· उत्केंद्र कोण



आ. ७७

एखादें ऊनेंद्र व त्याचें सहायदृत्त वरील यांवरील संवादी बिंदू अनुक्रमें ब आणि भ असल्यास मभ रेषेनें (म्हणजे भ बिंदु केंद्राला जोडणाऱ्या रेषेने) प्रधान अक्षाच्या धन दिशेशीं केलेल्या कोणाला ऊनेंद्रावरील ब बिंदूचा उत्केंद्र (eccentric) कोण म्हणतात.

सामान्यतः हा कोण ए ने दर्शवितात. आकृतींतील पमभ हा कोण ऊनेंद्रावरील ब या बिंदूचा उत्केंद्र कोण ए आहे.

१००·१ ऊनेंद्रावरील ब बिंदूचे याम त्याच्या उत्केंद्र कोणाच्या पदांत व्यक्त करणें.

मपभ या लंबकोण त्रिकोणावरून

मप = मभ कोज्या ए

= क कोज्या ए

$$पभ = मभ \ ज्या \ ए$$

$$= क \ ज्या \ ए$$

पण, मागील अनुच्छेदोन,

$$पब = \frac{ख}{क} \cdot पभ$$

आता $पभ = क \ ज्या \ ए$

$$\therefore \quad पब = \frac{ख}{क} \ क \ ज्या \ ए$$

$$पब = ख \ ज्या \ ए$$

यावरून ब बिंदूचा भुज मप आणि कोटि पब यांच्या अर्हा अनुक्रमें क कोज्या ए व ख ज्या ए आहेत.

म्हणून ब बिंदूचे याम (क कोज्या ए, ख ज्या ए) हे आहेत. ब बिंदूस 'बिंदु ए' असेंहि संबोधतात.

१००.२ ऊनेंद्रावरील दोन बिंदूंचे उत्केंद्र कोण दिले असल्यास त्यांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेचा समीकार काढणें.

समजा की ऊनेंद्रावरील ब व ब' या दोन बिंदूंचे उत्केंद्र कोण ए व ए' आहेत म्हणून त्यांचे याम (क कोज्या ए, ख ज्या ए) व (क कोज्या ए', ख ज्या ए') होतील.

ब व ब' या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$र - ख \ ज्या \ ए = \frac{ख \ ज्या \ ए' - ख \ ज्या \ ए}{क \ कोज्या \ ए' - क \ कोज्या \ ए} (य - क \ कोज्या \ ए)$$

$$= -\frac{ख \ २ \ कोज्या \left(\frac{ए + ए'}{२}\right) ज्या \left(\frac{ए - ए'}{२}\right)}{क \ २ \ ज्या \left(\frac{ए + ए'}{२}\right) ज्या \left(\frac{ए - ए'}{२}\right)} (य - क \ कोज्या \ ए)$$

$$= -\frac{ख}{क} \frac{कोज्या\left(\frac{ए+ए'}{२}\right)}{ज्या\left(\frac{ए+ए'}{२}\right)} (य - क\ कोज्या\ ए)$$

किंवा,

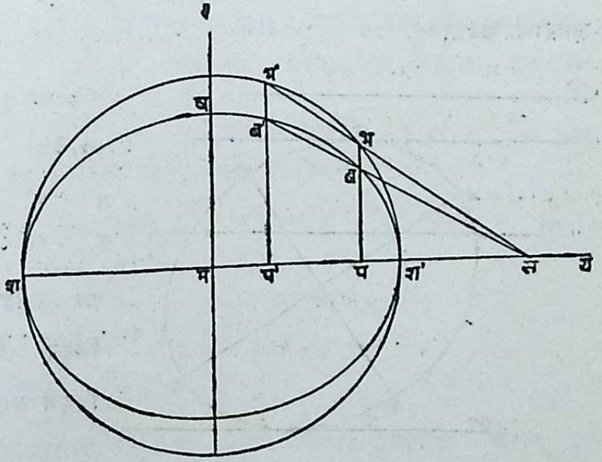
$$\frac{य}{क}\ कोज्या\ \frac{ए+ए'}{२} + \frac{र}{ख}\ ज्या\ \frac{ए+ए'}{२} = कोज्या\ ए\ कोज्या\ \frac{ए+ए'}{२}$$

$$+ ज्या\ ए\ ज्या\ \frac{ए+ए'}{२}$$

$$= कोज्या \left[ए - \frac{ए+ए'}{२} \right]$$

$$= कोज्या\ \frac{ए-ए'}{२}$$

१००.३. ऊनेंद्रावरील, ए व ए' हे उत्केंद्र कोण असणाऱ्या ब व ब' या दोन बिंदूंना जोडणारी रेषा आणि ऊनेंद्राच्या सहायवृत्तावरील ब व ब' यांचे दोन संवादी बिंदू भ, भ' यांना जोडणारी रेषा प्रधान अक्षावर एकमेकांस छेदतात.



आ. ७८

ब, ब' चे याम (क कोज्या ए, ख ज्या ए) व (क कोज्या ए' ख ज्या ए') आहेत; आणि भ, भ' या संवादी बिंदूंचे याम (क कोज्या ए, क ज्या ए) व (क कोज्या ए', क ज्या ए') आहेत.

आता भ व भ' यांना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$\frac{य}{क} \text{ कोज्या } \frac{ए+ए'}{२} + \frac{र}{क} \text{ ज्या } \frac{ए+ए'}{२} = \text{कोज्या } \frac{ए-ए'}{२} \quad (१)$$

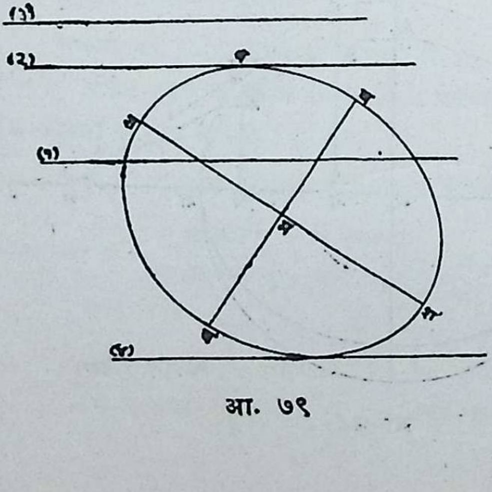
ब व ब' यांना जोडणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$\frac{य}{क} \text{ कोज्या } \frac{ए+ए'}{२} + \frac{र}{ख} \text{ ज्या } \frac{ए+ए'}{२} = \text{कोज्या } \frac{ए-ए'}{२} \quad (२)$$

समीकार (१) व (२) वरून असें दिसतें की बब' आणि भभ' य-अक्षावर एकच अंतःखंड करतात.

म्हणून बब' व भभ' एकमेकांस प्रधान अक्षावर छेदतात.

१०१. र=धय+ग या सरळ रेषेचें आणि $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊर्नेद्राचें छेदनबिंदू.



$$र=धय+ग \quad (१)$$

ही रेषा

$$\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१ \quad (२)$$

या ऊर्नेद्राला ज्या बिंदूंत छेदते त्या बिंदूंचे याम दोन्ही

समीकारांचें समाधान करतात. म्हणून ते हे समीकार य व र करिता सोडवून मिळतात.

(१) व (२) मधून र चें निरसन करून

$$\frac{य^2}{क^2}+\frac{(धय+ग)^2}{ख^2}=१$$

किंवा $य^2(क^2ध^2+ख^2)+२क^2धगय+क^2(ग^2-ख^2)=०$

हा समीकार य मधे द्विघातीय असल्यामुळे य च्या दोन अर्हा मिळतात. समजा त्या $य_1$ व $य_2$ ह्या आहेत. या अर्हा (१) व (२) च्या छेदनबिंदूंचे भुज—याम होत. आता समीकार (१), य व र मधील रेखीय समीकार असल्यामुळे य च्या प्रत्येक अर्हेशीं र ची केवळ एकच अर्हा संवादी असते; तसेंच व्यत्यासतःहि म्हणून समीकार (३) वरून मिळणाऱ्या य च्या दोन अर्हांशीं संवादी असणाऱ्या र च्या दोन अर्हा मिळतात. या (१) आणि (२) यांनी निरूपिलेल्या वक्रांच्या छेदनबिंदूंचें कोटि—याम होत.

म्हणून समीकार (१) ने दिलेली सरळ रेषा समीकार (२) ने दिलेल्या ऊर्नेद्राला केवळ दोन बिंदूंतच छेदते.

म्हणून कोणतीहि सरळ रेषा एखाद्या ऊर्नेद्राला सामान्यतः दोन बिंदूंत छेदते. आता

$य^2(क^2ध^2+ख^2)+२क^2धगय+क^2(ग^2-ख^2)=०$ या समीकाराचीं मूळें, त्याचा विवेचक

$$(२क^2धग)^2-४(ख^2+क^2ध^2)(ग^2-ख^2)क^2 \gtreqless ० \text{ असेल}$$

किंवा $$ख^2(क^2ध+ख^2)-ख^2ग^2 \gtreqless ० \text{ असेल}$$

किंवा $$क^2ध^2+ख^2 \gtreqless ग^2 \text{ असेल}$$

तदनुसार वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक आणि समान किंवा काल्पनिक असतात.

$\therefore$ $र=घय+ग$ $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या ऊनेन्द्रास ज्या दोन बिंदूत छेदते ते बिंदू.

$क^2घ^2+ख^2<ग^2$ असेल तर वास्तविक व भिन्न

$क^2घ^2+ख^2=ग^2$,, ,, ,, व संपाती

$क^2घ^2+ख^2<ग^2$,, ,, काल्पनिक असतात.

आकृतींत (१), (२) आणि (३) या अकांनी दर्शविलेल्या रेषांचा घ एकच आहे अर्थात् त्या परस्परांस समांतर आहेत.

सरळरेषा (१) ऊनेंद्राला दोन वास्तविक व भिन्न बिंदूंत छेदते ती $ग^2<क^2घ^2+ख^2$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे.

सरळरेषा (२) ऊनेंद्राला दोन वास्तविक आणि संपाती बिंदूंत छेदते. ती $ग^2=क^2घ^2+ख^2$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे. ही रेषा ऊनेंद्राला दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत मिळत असल्यामुळे ती ऊनेंद्राची स्पर्शरेषा आहे.

सरळरेषा (३) ऊनेंद्राला कोणत्याच वास्तविक बिंदूंत छेदत नाही. हेंच विधान अन्य शब्दांत मांडावयाचें म्हणजे ही रेषा ऊनेंद्राला दोन काल्पनिक बिंदूंत छेदते. ती $ग^2<क^2घ^2+ख^2$ या प्रतिबंधाचें समाधान करणाऱ्या ग च्या अर्हेनुसार काढली आहे.

१०१·१ घ च्या सर्व अर्हांकरिता $र=घय+ग$ ही सरळरेषा $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या ऊनेंद्राची स्पर्शरेषा असण्याकरिता प्रतिबंध.

जर $ग^2=क^2घ^2$ असेल तर $र=घ.य+ग$ ही रेषा $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या ऊनेंद्रास दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत छेदते हें मागील अनुच्छेदांत आपण पाहिलेंच आहे.

आता कोणतीहि सरळरेषा एखाद्या वक्रास दोन वास्तविक व संपाती बिंदूंत मिळत असेल तर परिभाषेवरून ती वक्राची स्पर्शरेषा होते.

म्हणून ध ची कोणतीहि अर्हा असली तरी $र = ध य + ग$ ही $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेन्द्राची स्पर्शरेषा होण्याकरिता

$$क^2 ध^2 + ख^2 = ग^2$$

अर्थात् $$ग = \pm \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2}$$

असावयास पाहिजे.

करणीचें धन चिन्ह घेऊन, ध च्या सर्व अर्हांकरिता, ऊनेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = धय + \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2} \qquad (१)$$

म्हणजे ध ची कोणतीहि अर्हा असली तरी

$$र = धय + \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2}$$

ही नेहमी $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेंद्राची स्पर्शरेषा असते.

आता $\sqrt{क^2 ध^2 + ख^2}$ या करणीच्या मागे ऋण चिन्ह घेतलें असतां, असें दिसून येतें की $र = धय - \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2}$ (२)

ही सुद्धा ऊनेंद्राची स्पर्शरेषा आहे. परन्तु (१) व (२) या रेषांचा ध एकच असल्यामुळे या दोन्ही स्पर्शरेषा परस्परांस समांतर आहेत. म्हणून ध च्या दिलेल्या अर्हेकरिता सामान्यतः परस्परांस समांतर असलेल्या दोन स्पर्शरेषा असतात. मागील अनुच्छेदाच्या आकृतींत या समांतर स्पर्शरेषा (२) व (४) या अंकांनी दर्शविलेल्या आहेत.

१०१.२ य कोज्या अ+र ज्या अ=ल ही सरळरेषा $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या उनेन्द्राची स्पर्शरेषा असण्याकरिता प्रतिबंध.

उनेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = धय + \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2} \qquad (१)$$

आता य कोज्या अ+र ज्या अ=ल

ही उनेंद्राची स्पर्शरेषा होण्याकरिता, ती (१) मधे दिलेल्या रेषेच्या रूपाचीच असली पाहिजे. म्हणून तिच्या समीकाराची स्पर्शरेषेच्या समीकाराशीं तुलना करून,

$$\frac{ध}{-कोज्या\ अ} = \frac{१}{ज्या\ अ} = \frac{\sqrt{क^2 ध^2 + ख^2}}{ल}$$

$$\therefore \quad ध = \frac{-कोज्या\ अ}{ज्या\ अ}$$

किंवा $$ध^2 = \frac{कोज्या^2 अ}{ज्या^2 अ}$$

किंवा $$क^2 ध^2 = \frac{क^2 कोज्या^2 अ}{ज्या^2 अ}$$

आणि $$\frac{ल^2}{ज्या^2 अ} = क^2 ध^2 + ख^2$$

किंवा $$\frac{ल^2}{ज्या^2 अ} = \frac{क^2 कोज्या^2 अ}{ज्या^2 अ} + ख^2$$

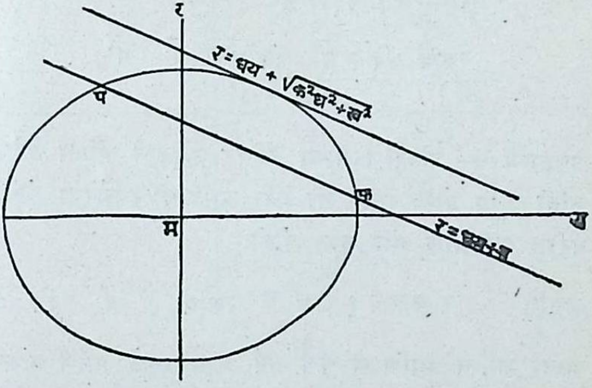
किंवा $$ल^2 = क^2 कोज्या^2 अ + ख^2 ज्या^2 अ.$$

$$\therefore \quad क^2 कोज्या^2 अ + ख^2 ज्या^2 अ = ल^2$$

हा इष्ट प्रतिबंध होय.

१०१.३ त्याचप्रमाणे त.य+थ.र=द ही उनेंद्राची स्पर्शरेषा होण्याकरिता $क^2 . त^2 + ख^2 . थ^2 = द^2$ हा प्रतिबंध आहे.

१०२. $र = धय + ग$ या सरळरेषेवर $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेंद्राने खंडित केलेल्या जीवेची लांबी काढणें.



आ० ८०

५२.२ या अनुच्छेदांत दिल्याप्रमाणे

$र = धय + ग$ ही रेषा $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेंद्राला ज्या बिंदूंत छेदते त्या प $(य_1, र_1)$ व फ $(य_2, र_2)$ या दोन बिंदूंचें भुज $य_1$ व $य_2$,

$य^2 (क^2ध^2 + ख^2) + २क^2धगय + क^2(ग^2 - ख^2) = ०$

या द्विघातसमीकाराचीं मूळें आहेत.

म्हणून बैजिकीने

$$य_1 + य_2 = -\frac{२क^2धग}{क^2ध^2 + ख^2}$$

आणि $$य_1य_2 = \frac{क^2(ग^2 - ख^2)}{क^2ध^2 + ख^2}$$

∴ ५२.२ किंवा ७८ या अनुच्छेदांत दिल्याप्रमाणे पफ या इष्ट जीवेची लांबी

$$= \sqrt{(य_१ - य_२)^२ + (र_१ - र_२)^२}$$

$$= (य_१ - य_२) \sqrt{१ + ध^२}$$

$$= \frac{२कख \sqrt{१+ध^२} \sqrt{क^२ध^२ + ख^२ - ग^२}}{क^२ध^२ + ख^२}$$

उपसाध्य :-- जेव्हा दिलेल्या रेषेवर ऊनेंद्राने खंडित केलेल्या जीवेची लांबी शून्य होते, तेव्हा ती रेषा ऊनेंद्राची स्पर्शरेषा होते. अशावेळीं वरील फलांतील अंश शून्य होतो.

अर्थात् $२ कख \sqrt{१+ध^२} \sqrt{क^२ध^२ + ख^२ - ग^२} = ०$

आता $क^२$, $ध^२$ आणि $ख^२$ पूर्ण वर्ग असल्यामुळे आणि क आणि ख शून्य नसल्यामुळे, $क^२ध^२ + ख^२$ आणि $१ + ध^२$ या राशी अवश्यमेव धन असल्या पाहिजेत. म्हणून त्या कधींहि शून्य होऊं शकत नाहीत.

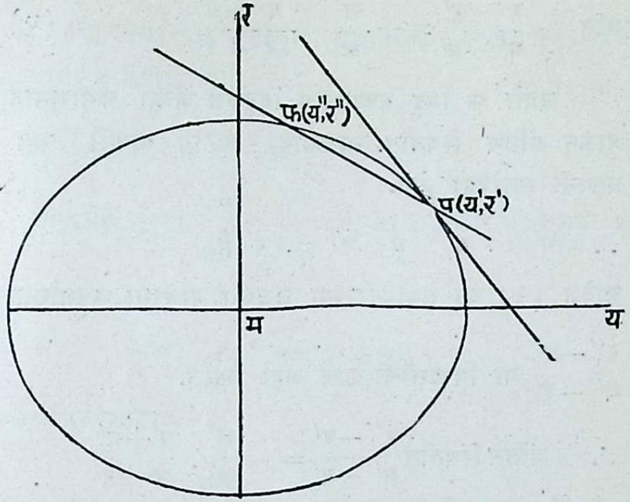
∴ $\sqrt{क^२ध^२ + ख^२ - ग^२} = ०$

किंवा $क^२ध^२ + ख^२ = ग^२$

अनुच्छेद १०१.१ मधे दुसऱ्या रीतीने काढलेला प्रतिबंध आणि हा प्रतिबंध एकच आहे, हें दिसून येतें.

१०३. $\frac{य^२}{क^२} + \frac{र^२}{ख^२} = १$ या ऊनेंद्राच्या $(य', र')$ या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार.

समजा प $(य', र')$ $(य'', र'')$ हे दिलेल्या ऊनेंद्रावर संनिध दोन बिंदू आहेत.



आ. ८१

पफ रेषेचा समीकार

$$र-र' = \frac{र''-र'}{य''-य'}(य-य') \qquad (१)$$

प व फ हे दोन्ही बिंदू ऊनेंद्रावर असल्यामुळे

$$\frac{य'^२}{क^२}+\frac{र'^२}{ख^२}=१ \qquad (२)$$

$$\frac{य''^२}{क^२}+\frac{र''^२}{ख^२}=१ \qquad (३)$$

(३) मधून (२) चा वियोग करून

$$\frac{य''^२-य'^२}{क^२}+\frac{र''-२'^२}{ख^२}=०$$

अर्थात् $$\frac{(र''-र')\ (र''+र')}{ख^२}=-\frac{(य''-य')\ (य''+य')}{क^२}$$

अर्थात् $\frac{र'' - र'}{य'' - य'} = -\frac{ख^२}{क^२} \quad \frac{य'' + य'}{र'' + र'}$ (२)

आता फ बिंदु वक्रावर प बिंदूकडे जेव्हा क्रमाक्रमाने सरकत जाऊन अंतिम स्थितींत त्याच्यावर संपतन पावतो तेव्हा पफ ही वक्राची स्पर्शरेषा होते.

$\therefore$ $य'' = य'$ व $र'' = र'$ हे

आदेश (२) या समीकाराच्या उजव्या बाजूच्या अपूर्णांकांत करून $\frac{र'' - र'}{य'' - र'}$ या निष्पत्तीची इष्ट अर्हा मिळते.

$$\therefore \quad \text{अंतिम स्थितींत} \frac{र'' - र'}{य'' - र'} = -\frac{ख^२}{क^२} \cdot \frac{य' + य'}{र' + र'}$$

$$= -\frac{ख^२}{क^२} \cdot \frac{य'}{र'}$$

याचा (१) मधे आदेश करून (य', र') बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र - र' = -\frac{ख^२}{क^२} \quad \frac{य'}{र'} (य - य')$$

किंवा $\frac{यय'}{क^२} + \frac{रर'}{ख^२} = \frac{य'^२}{क^२} + \frac{र'^२}{ख^२}$

परंतु (य',र') ऊर्नेद्रावर असल्यामुळे

$$\frac{य'^२}{क^२} + \frac{र'^२}{ख^२} = १$$

$\therefore$ (य',र') या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{यय'}{क^२} + \frac{रर'}{ख^२} = १$$

टीप :— स्पर्शरेषेचा हा समीकार, अनुच्छेद ५०.२ मधे दिलेल्या नियमानुसारहि लिहितां येतो.

१०३.१ $र = धय + \sqrt{क ध^2 + ख^2}$

या समीकाराची $\frac{यय'}{क^2} + \frac{रर'}{ख^2} = १$ या समीकाराशीं तुलना करून

दिसून येतें की

$$र = धय + \sqrt{क^2ध^2 + ख^2}$$

ही स्पर्शरेषा ऊर्नेंद्राला

$$\left(\frac{-क^2ध}{\sqrt{क^2ध^2 + ख^2}}, \frac{ख^2}{\sqrt{क^2ध^2 + ख^2}} \right)$$

या बिंदूशीं स्पर्श करते.

१०३.२ उत्केंद्रकोण 'ए' असलेल्या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार.

'ए' या बिंदूचे यास (क कोज्या ए, ख ज्या ए) आहेत.

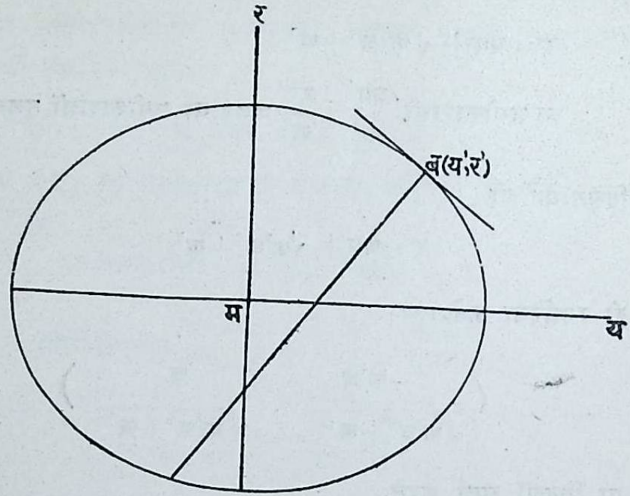
आता $\frac{यय'}{-} + \frac{रर'}{ख^2} = १$ या समीकारांत य' व र' करिता या

यामांचा आदेश करून इष्ट स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{य . क \text{ कोज्या } ए}{क^2} + \frac{र . ख \text{ ज्या } ए}{ख^2} = १$$

किंवा $$\frac{य \text{ कोज्या } ए}{क} + \frac{र \text{ ज्या } ए}{ख} = १$$

१०४. $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ ऊनेंद्रावरील $(य'_१, र')$ या बिंदूशीं असणाऱ्या अभिलंबाचा समीकार.



आ. ८२

(य', र') बिंदूशी असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{यय'}{क^2}+\frac{रर'}{ख^2}=१$$

आता (य', र') बिंदूशीं असणारा अभिलंब हा त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेला त्याच बिंदूशीं लंब असणारी रेषा होय.

(य', र') बिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याहि रेषेचा समीकार

$$र-र'=घ\ (य-य')$$

ही त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेला लंब असल्यास

$$(घ)\ -\left(\frac{य'}{क^2}\cdot\frac{ख^2}{र'}\right)=-१$$

अथवा $घ=\frac{क^2}{ख^2}\cdot\frac{र'}{य'}$

∴ अभिलंबाचा समीकार

$$र-र' = \frac{क^२}{ख^२} \frac{र'}{य'} (य-य')$$

किंवा $$\frac{य-य'}{\frac{य'}{क^२}} = \frac{र-र'}{\frac{र'}{ख^२}}$$

१०४.१ उत्कें‌द्रकोण 'ए' असलेल्या बिंदूशीं असणाऱ्या अभिलंबाचा समीकार मागील अनुच्छेदाच्या फलांत

य' = क कोज्या ए आणि र' = ख ज्या ए यांचा आदेश करून इष्ट अभिलंबाचा समीकार

$$\frac{य-क\,कोज्या\,ए}{\frac{क\,कोज्या\,ए}{क^२}} = \frac{र-ख ज्या\,ए}{\frac{ख ज्या\,ए}{ख^२}}$$

किंवा $$\frac{कय}{कोज्या\,ए} - क^२ = \frac{खर}{ज्या\,ए} - ख^२$$

किंवा कय व्युत्कोज्या ए − खर व्युज्या ए = $क^२ - ख^२$

१०४.२ ए व ए' बिंदूंशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूचे याम काढणें

ए व ए' बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषांचे समीकार

$$\frac{य}{क} कोज्या\,ए + \frac{र}{ख} ज्या\,ए - १ = ० \qquad (१)$$

$$\frac{य}{क} कोज्या\,ए' + \frac{र}{ख} ज्या\,ए' - १ = ० \qquad (२)$$

यांच्या छेदन बिंदूंचे याम (१) व (२) हे समीकार य व र करिता सोडवून मिळतात.

∴ तिर्यक् गुणनाच्या रीतीने

$$\frac{\frac{य}{क}}{ज्या\,ए - ज्या\,ए'} = \frac{\frac{र}{ख}}{कोज्या\,ए' - कोज्या\,ए}$$

$$= \frac{-१}{ज्या\,ए'\,कोज्या\,ए - कोज्या\,ए'\,ज्या\,ए'}$$

$$= \frac{१}{ज्या\,(ए - ए')}$$

किंवा

$$\frac{\frac{य}{क}}{२\,कोज्या\,\frac{ए+ए'}{२}\,ज्या\,\frac{ए-ए}{२}} = \frac{\frac{र}{ख}}{२\,ज्या\,\frac{ए-ए'}{२}\,ज्या\,\frac{ए-ए'}{२}}$$

$$= \frac{१}{२\,ज्या\,\frac{ए-ए'}{२}\,कोज्या\,\frac{ए-ए'}{२}}$$

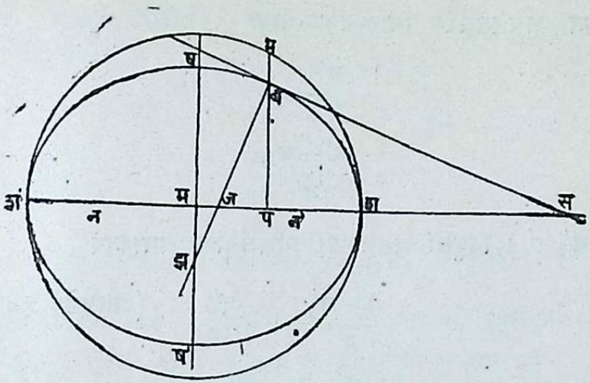
$$\therefore\ य = क\,\frac{कोज्या\,\frac{१}{२}\,(ए+ए')}{कोज्या\,\frac{१}{२}\,(ए-ए')}$$

आणि

$$र = ख\,\frac{ज्या\,\frac{१}{२}\,(ए+ए')}{कोज्या\,\frac{१}{२}\,(ए-ए')}$$

१०५. अधः स्पर्शरेषा व अधोलंब यांच्या लांबी काढणें.

ऊर्नेंद्रावरील ब (य′, र′) बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषा व अभिलंब रेषा प्रधानाक्षाला अनुक्रमें स व ज बिंदूंत छेदतात. समजा बप ही ब बिंदूची कोटि आह. व भ हा सहायवृत्तावरील त्याचा संवादी बिंदु आहे.



आ. ८३

व ($य^{\prime}, र^{\prime}$) बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{यय^{\prime}}{क^{2}} + \frac{रर^{\prime}}{ख^{2}} = १ \qquad (१)$$

ही रेषा य-अक्षाला म्हणजेच र = ० या रेषेला स बिंदूंत छेदते. समीकार (१) मधे र = ० हा आदेश करून, म्हणजेच

$$\frac{यय^{\prime}}{क^{2}} = १$$

अर्थात् $य = \frac{क^{2}}{य^{\prime}} = \frac{क^{2}}{मप}$

हा स चा भुज होय.

$$\therefore \quad मस = \frac{क^{2}}{मप}$$

किंवा $मस \cdot मप = क^{2} = मश^{2}$

आता अधःस्पर्शरेष पस = मस – मप

$$= \frac{क^2}{य'} - य'$$

$$= \frac{क^2 - य'^2}{य'}$$

(य', र') बिंदूशीं असणाऱ्या अभिलंबाचा समीकार

$$\frac{\frac{य - य'}{य'}}{क^2} = \frac{\frac{र - र'}{र'}}{ख^2} \qquad \text{(अनुच्छेद १०४)}$$

ही रेषा य—अक्षाला म्हणजेच र = ० या रेषेला ज बिंदूंत मिळते. त्याचा भज अभिलंबाच्या समीकारांत र = ० हा आदेश करून मिळतो.

$$\therefore \qquad \frac{\frac{य - य'}{य'}}{क^2} = -ख^2$$

$$\text{किंवा} \qquad य - य' = \frac{ख^2}{क^2}\, य'$$

$$\text{,,} \qquad य = \frac{क^2 - ख}{क^2}\, य'$$

$$\therefore \qquad मज = \frac{क^2 - ख^2}{क^2} . य'$$

$$= \frac{क^2\, उ^2}{क^2} . य'$$

$$= उ . य'$$

$$= उ^2 . मप$$

आता अधोलंब $पज = मप - मज$

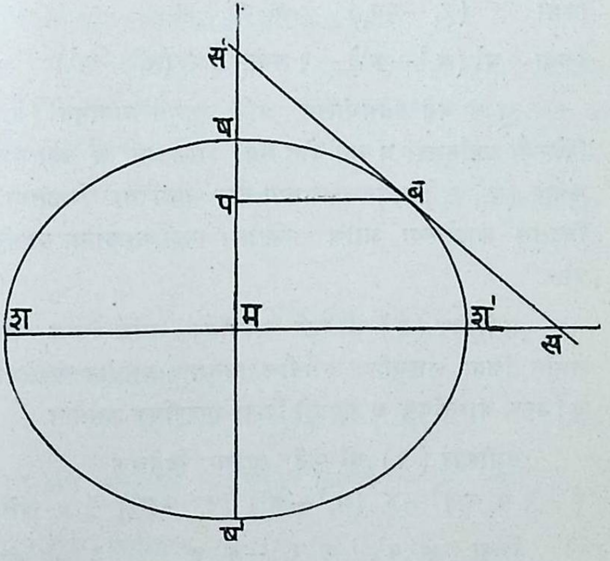
$$= मप - उ^{२}. मप$$

$$= (१ - उ^{२})\ मप$$

$$\therefore \quad \frac{पज}{पम} = \frac{१ - उ^{२}}{१},$$

$$= \frac{ख^{२}}{क^{२}} \quad [\because \quad ख^{२} = क^{२}(१ - उ^{२})]$$

उपसाध्य :— जर ब ($य'$, $र'$) बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा गौणाक्षाला स' बिंदूंत छेदत असेल व बप हा गौणाक्षावर लंब असेल



आ. ८४

तर वरील प्रमाणे

$$मस' . मप = ख^{२}$$

हें सिद्ध करतां येतें.

१०६ एखाद्या ऊनेंद्राला $(य_1, र_1)$ बिंदूपासून वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक आणि संपाती, किंवा काल्पनिक अशा दोन स्पर्शरेषा काढतां येतात हें दाखविणें.

ध च्या सर्व अर्हांकरिता, ऊनेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = धय + \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2} \qquad (१)$$

हा आहे. ही रेषा $(य_1, र_1)$ बिंदूतून जात असल्यास

$$र_1 = ध\, य_1 + \sqrt{क^2 ध^2 + ख^2}$$

किंवा $$(र_1 - धय_1)^2 = क^2 ध^2 + ख^2$$

किंवा $$ध^2 (य_1^2 - क^2) - २\, ध\, य_1\, र_1 + (र_1^2 - ख^2) = ० \qquad (२)$$

हा ध मधे वर्गसमीकार आहे. म्हणून यापासून $(य_1, र_1)$ च्या दिलेल्या अर्हांनुसार ध च्या दोन अर्हा मिळतात. ध च्या या दोन अर्हांनुसार $(य_1, र_1)$ मधून जाणाऱ्या दोन स्पर्शरेषा मिळतात. $(य_1, र_1)$ बिंदूतून काढलेल्या आणि ऊनेंद्राला स्पर्श करणाऱ्या या दोन स्पर्शरेषा होत.

समीकार (२) चीं मूळें वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक व समान किंवा काल्पनिक असतील तदनुसार या दोन स्पर्शरेषा वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती किंवा काल्पनिक असतात.

समीकार (२) चीं मूळें, त्याचा विवेचक

$$(-२\, य_1\, र_1)^2 - ४\, (य_1^2 - क^2)(र_1^2 - ख^2) \gtreqless ० \text{ असेल}$$

किंवा $$ख^2 य_1^2 + क^2 र_1^2 - क^2 ख^2 \gtreqless ० \text{ असेल}$$

,, $$\frac{य_1^2}{क_1^2} + \frac{र_1^2}{ख^2} - १ \gtreqless ० \text{ असेल}$$

तदनुसार वास्तविक आणि भिन्न, वास्तविक आणि समान किंवा काल्पनिक असतात.

आता अनुच्छेद ७५ वरून, ($य_1, र_1$) हा बिंदु

$$\frac{य_1^2}{क^2} + \frac{र_1^2}{ख^2} - १ \gtreqless ० \quad \text{असेल}$$

तदनुसार ऊनेंद्राच्या बाहेर, वर, अथवा आंत असतो.

म्हणून,

(१) ऊनेंद्राच्या बाहेरील ($य_1, र_1$) बिंदूपासून काढलेल्या दोन्ही स्पर्शरेषा वास्तविक व भिन्न असतात.

(२) ऊनेंद्रावर असलेल्या ($य_1, र_1$) बिंदूपासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा एकाच वास्तविक स्पर्श- रेषेंत (अर्थात् वक्राला ($य_1$ $र_1$) शीं काढलेल्या स्पर्शरेषेंत) विलीन होतात.

(३) ऊनेंद्राच्या आंतील ($य_1, र_1$) बिंदूपासून काढलेल्या दोन्ही स्पर्शरेषा काल्पनिक असतात. अशा बिंदूपासून कोणतीच वास्तविक स्पर्शरेषा रैखिकीने काढतां येत नाही.

१०७. परस्परांस लंबकोण करून छेदत असलेल्या दोन स्पर्शरेषांच्या छेदन-बिंदूचा पथ काढणें.

$\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेंद्राच्या कोणत्याहि

स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = धय + \sqrt{क^2ध^2 + ख^2} \quad \text{आहे.}$$

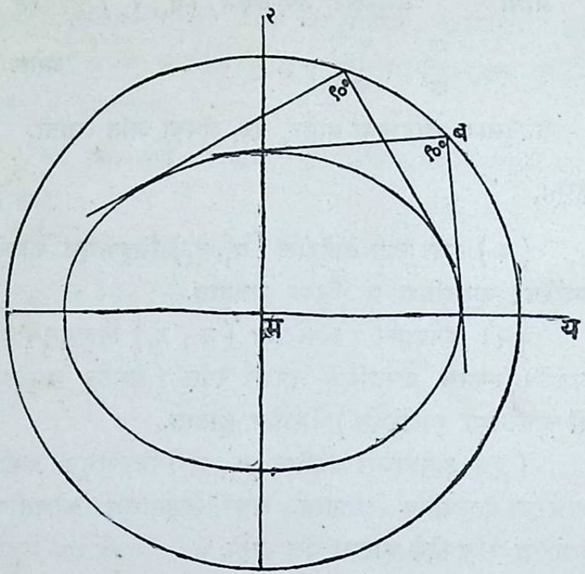
हिला लंब असलेल्या स्पर्शरेषेचा प्रवणक $-\frac{१}{ध}$ आहे.

म्हणून तिचा समीकार

$$र = -\frac{१}{ध} य + \sqrt{क^2\left(-\frac{१}{ध}\right)^2 + ख^2}$$

होईल. म्हणून (त,थ) हा त्यांचा छेदनबिंदु असेल तर

$$थ - धत = \sqrt{क^2ध^2 + ख^2} \qquad (१)$$



आ. ८५

$$\text{ध}\text{थ}+\text{त} = \sqrt{\text{क}^2+\text{ध}^2\text{ख}^2} \qquad (२)$$

(१) व (२) मधून ध चें निरसन करून, त व थ मधे संबंध मिळतो. याकरिता (१) व (२) मधील समीकारांचा वर्गयोग करून

$(\text{त}^2+\text{थ}^2)\ (१+\text{ध}^2) = (\text{क}^2+\text{ख}^2)\ (१+\text{ध}^2)$

किंवा $\quad \text{त}^2+\text{थ}^2 = \text{क}^2+\text{ख}^2$

∴ (त,थ) च्या पथाचा समीकार

$$\text{य}^2+\text{र}^2 = \text{क}^2+\text{ख}^2$$

परंतु हा वृत्ताचा समीकार आहे.

∴ इष्ट पथ $\text{य}^2+\text{र}^2 = \text{क}^2+\text{ख}^2$ हें वृत्त होय.

अन्यथा :—

ध ची कोणतीहि अर्हा असली तरी

$$र = धय + \sqrt{क^2ध^2+ख^2} \text{ ही नेहमी}$$

$$\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख} = १ \text{ या ऊनेंद्राची स्पर्शरेषा असते.}$$

$$\text{आता } र = धय+ \sqrt{क^2ध^2+ख^2}$$

हा समीकार पुढीलप्रमाणेहि लिहितां येतो.

$$(र-धय)^2 = क^2ध^2+ख^2$$

किंवा $$(य^2-क^2) ध^2-२यरध+(र^2-ख^2) = ०$$

हा ध मधे द्विघाती समीकार असल्यामुळे (य, र) पासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषांना अनुसरून, ध च्या $ध_१$ व $ध_२$ या अर्हा मिळतात.

आता जर $ध_१ ध_२= -१$ असेल तर (य, र) पासून काढलेल्या दोन स्पर्शरेषा परस्परांस लंब असतात.

परंतु $$ध_१ध_२ = \frac{र^2-ख^2}{य^2-क^2}$$

∴ दोन स्पर्शरेषा परस्परांस लंब होण्यास प्रतिबंध

$$\frac{र^2-ख^2}{य^2-क^2} = -१$$

किंवा $$र^2-ख^2 = क^2-य^2$$

किंवा $$य^2+र^2 = क^2+ख^2$$

परंतु (य,र) हा परस्परांस लंब असलेल्या स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु आहे. म्हणून त्याचा पथ

$$य^2+र^2 = क^2+ख^2.$$

हा समीकार वृत्त निरूपित करतो हें उघड आहे.

या वृत्താचें कॆंद्र ऊनेंद्राचेंच केंद्र असून त्याची त्रिज्या ऊनेंद्राच्या प्रधान व गौण अक्षांचीं अग्रें सांधणाऱ्या रेषेच्या लांबी इतकी असते.

या वृत्ताला ऊनेंद्राचें नियतवृत्त (director circle) असें म्हणतात.

उदाहरणसंग्रह १४

(१) $\sqrt{३}$ र=य+३ ही सरळ रेषा $र^२=४य$ या एकेंद्राला आणि $२य^२+३र^२=६$ या ऊनेंद्राला स्पर्श करते हें दाखवा, आणि स्पर्शबिंदूंचे याम काढा. (बनारस १९३१)

(२) $\frac{य^२}{९}+\frac{र^२}{४}=१$ या ऊनेंद्राच्या जीवा (१, ०) या बिंदूंतून जातात. तर त्याच्या मध्यबिंदूंचा पथ काढा. (मैसूर १९४३)

(३) $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊनेंद्राच्या गौण अक्षावर केंद्रापासून $\sqrt{क^२-ख^२}$ अंतरावर असणारे दोन बिंदू घेतले व त्यांच्यापासून ऊनेंद्राच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेवरे लंब काढले. तर त्या लंबांच्या वर्गांचा योग $२क^२$ आहे हें सिद्ध करा. (मद्रास १९३८)

(४) न ही एक ऊनेंद्राची नाभि व ब हा त्यावरील बिंदु असल्यास नब रेषा व्यास धरून काढलेलें वृत्त ऊनेंद्राच्या सहायवृत्ताला स्पर्श करते हें सिद्ध करा. (नागपूर १९२६)

(५) $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊनेंद्रावरील एका बिंदूचा उत्केंद्र कोण 'ए' असून त्या बिंदूशीं काढलेला अभिलंब शश' या प्रधान अक्षाला ज बिंदूंत आणि षष' या गौण अक्षाला झ बिंदूंत छेदतो. $\frac{श'ज}{शज}=\frac{षझ}{ष'झ}$ असल्यास स्प ए $=\frac{ख^२}{क^२}$ हें दाखवा.

(बनारस १९२४)

(६) $\frac{य^२}{४+ऋ}+\frac{र^२}{२+ऋ}=१$ हा पथ (२, $\sqrt{३}$) बिंदूंतून जाण्याकरिता ऋ च्या अर्हा काढा. या अर्हांनुसार मिळणाऱ्या समी-

कारांनी निरूपिलेल्या पथांचें अनुरेखण करा आणि छेदनबिंदूशीं हे पथ एकमेकांस लंबकोण करून छेदतात हें दाखवा.

(नागपूर १९२७)

(७) $य^२+४र^२=४$ ऊनेंद्राच्या एकमेकांस लंब असणाऱ्या दोन स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूचा पथ काढा; आणि या पथावरील ज्या बिंदूची ऊनेंद्रासंबंधीची स्पर्शजीवा मूलबिंदूशीं लंबकोण करते त्या बिंदूचे याम काढा. (नागपूर १९४४)

(८) $\frac{य^२}{३६}+\frac{र^२}{९}=१$ या ऊनेंद्राच्या, (२, १) बिंदूंतून जाणाऱ्या व त्याच बिंदूशीं दुभागल्या जाणाऱ्या जीवेचा समीकार काढा.

(नागपूर १९३८)

(९) $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊनद्रावरील, उत्केंद्रकोण अ, आ असणाऱ्या बिंदूंना जोडणाऱ्या जीवेचा समीकार काढा. ही जीवा प्रधान अक्षावरील एका स्थिर बिंदूंतून जात असल्यास स्प $\frac{अ}{२}$ स्प $\frac{आ}{२}$ अचल आहे हें दाखवा. (मद्रास १९४२)

(१०) एक ऊनेंद्र दोन स्थिर लंब रेषांना स्पर्श करून त्यांच्यामधे फिरतें. तर त्याच्या केंद्राचा पथ एक वृत्तचाप आहे हें सिद्ध करा.

(नागपूर १९२५)

(११) $\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}=१$ या ऊनेंद्राच्या '२ ग' समान अचल लांबी असलेल्या जीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ

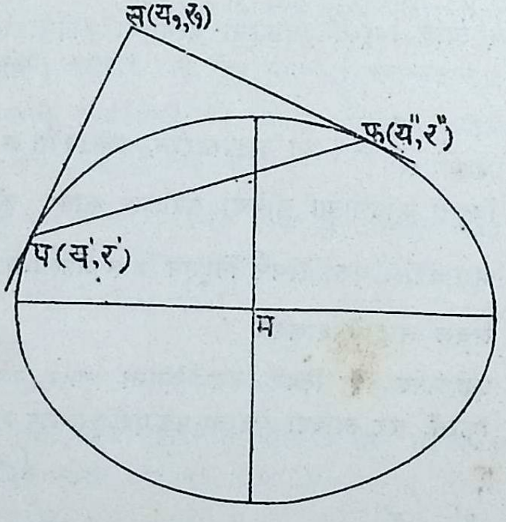
$$\left(\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}-१\right)\left(\frac{य^२}{क^४}+\frac{र^२}{ख^४}\right)+\frac{ग^२}{क^२ख^२}\left(\frac{य^२}{क^२}+\frac{र^२}{ख^२}\right)=०$$

आहे हें दाखवा.

(१२) $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या ऊनेंद्राच्या उत्थानांच्या टोकांशीं काढलेल्या स्पर्शरेषा, ऊनेंद्राचा अक्ष आणि नियता यांच्या छेदनबिंदूंमधून जातात हें सिद्ध करा.

---

१०८. $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ ऊनेंद्राला स ($य_1$, $र_1$) बाह्य बिंदूपासून काढलेल्या स्पर्शरेषांच्या स्पर्शजीवेचा समीकार काढणें.



आ. ८६

समजा $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$

ऊनेंद्राला स ($य_1$, $र_1$) पासून काढलेल्या सप व सफ या स्पर्शरेषांचे स्पर्शबिंदू प (य',र') व फ (य'',र'') आहेत. प व फ शीं असलेल्या स्पर्शरेषांचे समीकार

$$\frac{यय'}{क^२}+\frac{रर'}{ख^२}=१ \qquad (१)$$

$$\frac{यय''}{क^२}+\frac{रर''}{ख^२}=१ \qquad (२)$$

हे आहेत.

(१) व (२) ह्या दोन्ही स्पर्शरेषा स ($य_१, र_१$) बिंदूंत छेदतात, अर्थात् त्या स ($य_१, र_१$) मधून जातात.

म्हणून $$\frac{य_१\, य'}{क^२}+\frac{र_१\, र'}{ख^२}=१ \qquad (३)$$

$$\frac{य_१\, य''}{क^२}+\frac{र_१ र''}{ख^२}=१$$

आता प ($य', र'$) व फ ($य'', र''$) हे बिंदू

$$\frac{यय_१}{क^२}+\frac{रर_१}{ख^२}=१ \qquad (५)$$

या पथावर असण्याकरिता समीकार (३) व (४) हे प्रतिबंध असून ते पाळले जातात. समीकार (५) य आणि र मधे एकघाती असल्यामुळे तो सरळ रेषा निरूपितो.

म्हणून $$\frac{यय_१}{क^२}+\frac{रर_१}{ख^२}=१$$

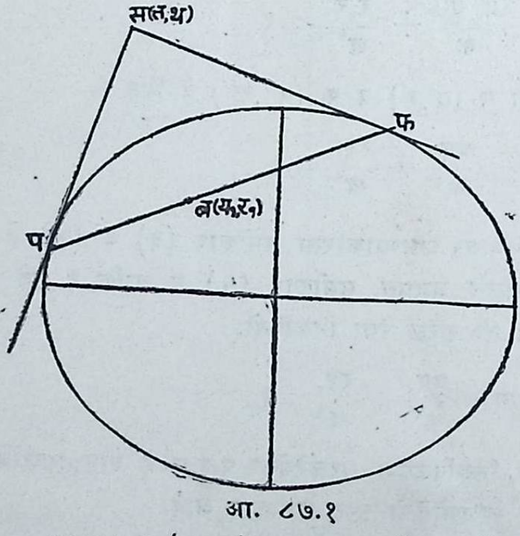
याने निरूपिलेल्या सरळरेषेवर प व फ हे दोन स्पर्शबिंदू आहेत. अर्थात् हा स्पर्शजीवेचा इष्ट समीकार आहे.

आता ($य_१$, $र_१$) पासून काढलेल्या स्पर्शरेषा वास्तविक असोत अथवा काल्पनिक असोत, समीकार (५) नेहमी एक वास्तविक सरळरेषा निरूपितो. म्हणून जेव्हा ($य_१$, $र_१$) बिंदु ऊनेंद्राच्या आंत असतो तेव्हा समीकार (५) ($य_१$, $र_१$) मधन काढलेल्या दोन काल्पनिक स्पर्शरेषांची

स्पर्शजीवा निरूपितो असें मानलें जातें. या प्रकारांत स्पर्शबिंदू जरी काल्पनिक असले तरी त्या दोन काल्पनिक बिंदूना जोडणारी स्पर्शजीवा मात्र वास्तविक असते.

जेव्हा ($य_1, र_1$) बिंदु ऊनेंद्रावर असतो तेव्हा त्याची स्पर्शजीवा त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेशीं संपाती होते. स्पर्शजीवेचे व स्पर्शरेषेचे समीकार एकच आहेत यावरूनहि या विधानाची सत्यता दिसून येते.

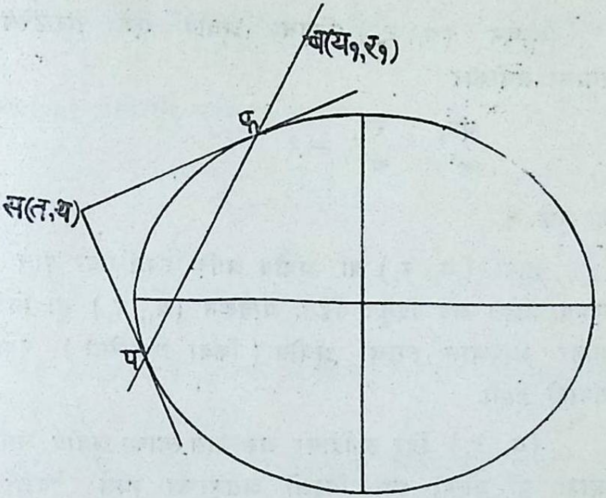
१०९. $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ या ऊनेंद्राला अनुलक्षून ($य_1, र_1$) बिंदूच्या ध्रुवीयाचा समीकार काढणें.



आ. ८७.१

समजा ब ($य_1, र_1$) मधून जाणारी व ऊनेंद्राला प व फ बिंदूंत छेदणारी बपफ ही कोणतीहि जीवा आहे. प व फ शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषा स (त, थ) बिंदूंत मिळतात.

(त, थ) बिंदूच्या स्पर्शजीवेचा अर्थात् पफ चा समीकार



आ. ८७.२

$$\frac{यत}{क} + \frac{रथ}{ख^{२}} = १$$

ही रेषा ब ($य_{१}$, $र_{१}$) मधून जाते.

$$\therefore \quad \frac{य_{१}त}{क^{२}} + \frac{र_{१}थ}{ख^{२}} = १$$

बपफ च्या निरनिराळ्या स्थितींनुसार हा संबंध (त, थ) च्या निरनिराळ्या अर्हांकरिता सत्य आहे.

म्हणून (त, थ) चा पथ

$$\frac{यय_{१}}{क^{२}} + \frac{रर_{१}}{ख^{२}} = १$$

या समीकाराने निरूपिला जातो. म्हणून हा ($य_{१}$,$र_{१}$) बिंदूच्या ध्रुवीयाचा इष्ट समीकार आहे. हा समीकार य व र मध्ये एकघाती असल्यामुळे तो सरळ रेषा निरूपितो.

म्हणून $(य_१, र_१)$ बिंदूचा ध्रुवीय एक सरळरेषा असून त्याचा समीकार

$$\frac{यय_१}{क^२}+\frac{रर_१}{ख^२}=१$$

हा आहे.

आता $(य_१, र_१)$ चा ध्रुवीय आणि स्पर्शजीवा यांचे समीकार एकच आहेत असें दिसून येईल. यावरून $(य_१, र_१)$ हा बिंदु ऊनेंद्रा बाहेर असल्यास त्याचा ध्रुवीय (किंवा ध्रुवीरेषा) स्पर्शजीवेशी संपाती होतो.

$(य_१, र_१)$ बिंदु ऊनेंद्रावर असल्यास त्याचा ध्रुवीय आणि स्पर्श-जीवा हीं दोन्ही त्या बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्श रेषेशीं संपाती होतात.

$(य_१, र_१)$ बिंदु ऊनेंद्राच्या आंत असल्यास, $(य_१, र_१)$ पासून काढलेल्या दोन काल्पनिक स्पर्शरेषांच्या दोन काल्पनिक स्पर्शबिंदूंना जोडणारी रेषाच ध्रुवीरेषा होते.

म्हणून ध्रुव आणि ध्रुवीय यांच्या परिभाषा वृत्त प्रकरणांत, अनुच्छेद ५६.१ मधें दिल्याप्रमाणे देता येतात.

उपसाध्य १ :-- प बिंदूचा ध्रुवीय फ बिंदूंतून जात असल्यास, फ चा ध्रुवीय प तून जातो. वृत्तप्रकरणांत दिलेल्या रीतीने हें सिद्ध करता येईल. (अनुच्छेद ५७)

उपसाध्य २ :–प व फ बिंदूंच्या ध्रुवीयांचा छेदनबिंदु स, हा पफ रेषेचा ध्रुव असतो. हें सुद्धा वृत्ता प्रकरणांत दिलेल्या रीतीने सिद्ध करतां येईल. (अनुच्छेद ५७.१)

उपसाध्य ३:– ऊनेंद्राची नियता ही तिच्याशीं संवादी असलेल्या नाभीचा ध्रुवीय असते.

दोन्ही नाभींचे याम अनुक्रमें (+कउ, ०) आणि (−कउ, ०) आहेत.

त्यांच्या ध्रुवीयांचे समीकार अनुक्रमे

$$\frac{यकउ}{क^२} = १ \quad किंवा \quad य = \frac{क}{उ} \qquad (१)$$

$$व \quad \frac{-यकउ}{क^२} = १ \quad किंवा \quad य = -\frac{क}{उ} \qquad (२)$$

आहेत.

परंतु हे त्यांच्याशीं संवादी असलेल्या नियतांचे समीकार आहेत म्हणून इष्ट विधान सिद्ध होते.

११०. काय+खार+गा = ० (१) या दिलेल्या कोणत्याहि रेषेचा ध्रुव काढणें.

समजा ($य_१$, $र_१$) हा त्या रेषेचा इष्ट ध्रुव आहे. आता समीकार (१) हा ($य_१$, $र_१$) च्या ध्रुवीयाचा समीकार आहे. परंतु ($य_१$, $र_१$) च्या ध्रुवीयाचा समीकार

$$\frac{यय_१}{क^२} + \frac{रर_१}{ख^२} = १ \qquad (२)$$

आता (१) व (२) मधील समीकार एकच रेषा निरूपितात. म्हणून त्यांतील गुणकांची तुलना करून

$$\frac{\frac{य_१}{क^२}}{का} = \frac{\frac{र_१}{ख^२}}{खा} = \frac{-१}{गा}$$

$$यावरून \qquad य_१ = -\frac{का\,क^२}{गा}$$

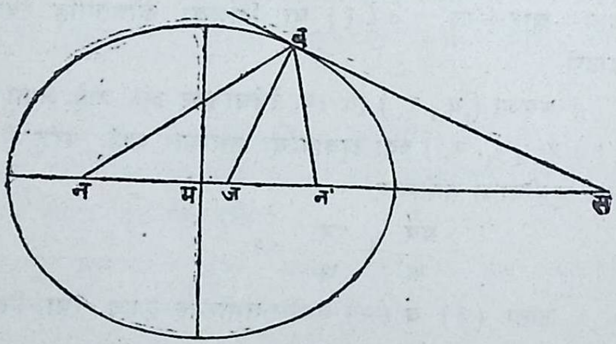
$$आणि \qquad र_१ = -\frac{खा\,ख^२}{गा}$$

म्हणून इष्ट ध्रुवाचे याम $\left(-\frac{\text{का क}^2}{\text{गा}}, -\frac{\text{खा ख}^2}{\text{गा}}\right)$

हे होत.

१११. ऊनद्राचे कांही गुणधर्म

१११.१ (१) ब (य′, र′) शीं असलेला अभिलंब प्रधान अक्षाला ज बिंदूंत मिळत असेल तर नज=उ.नब आणि ब शीं असलेली स्पर्शरेषा व अभिलंब नब व न′ब या नाभ्यंतरांमधील कोणांचें अनुक्रमें अंतरतः व बाह्यतः द्विभाजन करतात.



आं. ८८

$$\text{नज} = \text{नम} + \text{मज}$$

पण $\quad \text{नम} = \text{क}.\text{उ}$ (अनु. ८९)

व $\quad \text{मज} = \text{उ}^2\text{य}'$ (अनु. १०५)

$\therefore \quad \text{नज} = \text{कउ} + \text{उ}^2\text{य}'$

$$= \text{उ} \; (\text{क} + \text{उय}')$$

पण नाभ्यंतर $नव = क + उ\,य'$ (अनु. ९३)

$\therefore$ $नज = उ.नव$ (१)

त्याचप्रमाणे, $न'ज = मन' - मज$

$= कउ - उ^{2}य'$

$न'ज = उ(क - उय')$

$= उ.न'ब$ (अनु. ९३) (२)

(१) आणि (२) वरून

$नज : न'ज = नब : न'ब$

म्हणून, रैखिकीने, बज हा अभिलंब नबन' कोणाचें अंतरतः द्विभाजन करतो; आणि बस ही स्पर्शरेषा नब व नब मधील कोण बाह्यतः दुभागते.

वरील गुणधर्माचें विधान खाली दिल्याप्रमाणेंहि करतां येते :—

"ब शीं असलेली स्पर्शरेषा नब व न'ब या नाभ्यंतराशीं नेहमी सारखाच कोण करते."

१११.२ (२) ऊनेंद्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर नाभींपासून नट व न'ट' लंब काढले तर ट व ट' त्याच्या सहायवृत्तावर असतात. आणि $नट \times न'ट' = ख^{2}$ शिवाय मट व न'ब समांतर असतात.

कोणत्याहि स्पर्शरेषेचा समीकार

$$र = धय + \sqrt{क^{2}ध^{2} + ख^{2}}$$

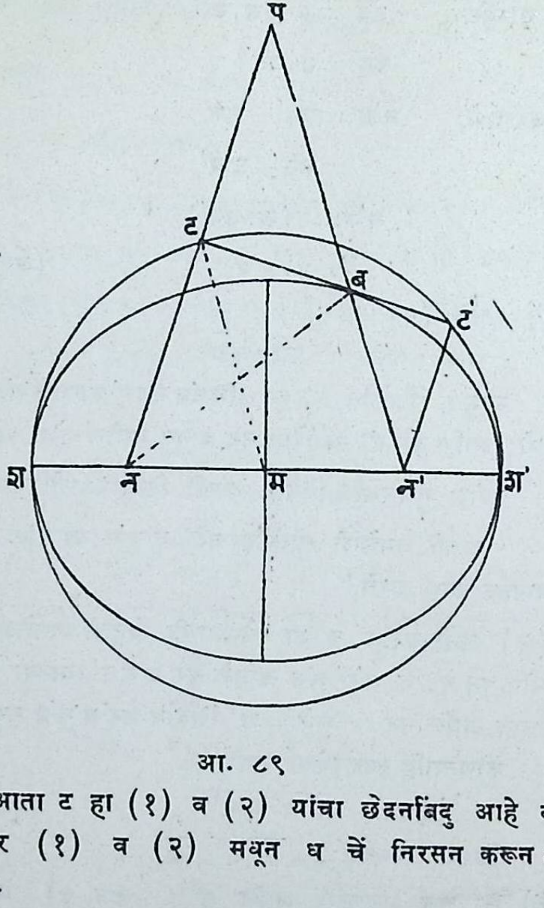
किंवा $र - धय = \sqrt{क^{2}ध^{2} + ख^{2}}$ (१)

(१) ला लंब असणारी आणि न (—कउ, ०) या नाभीमधून जाणारी रेषा

$$र - ० = -\frac{१}{ध}(य + क\,उ)$$

किंवा $धर + य = -कउ$ (२)

ही आहे.



आ. ८९

आता ट हा (१) व (२) यांचा छेदनबिंदु आहे व म्हणून समीकार (१) व (२) मधून ध चें निरसन करून ट चा पथ मिळतो.

(१) व (२) चा वर्गयोग करून

$$(१+ध^२)\ (य^२+र^२)=क^२ध^२+ख^२+क^२उ^२$$
$$=क^२ध^२+क^२(१-उ^२)+क^२उ^२$$
$$={}^२क\,ध^२+क^२$$
$$=क^२(१+ध^२)$$

दोन्ही बाजूंना $(१+घ^२)$ ने भागून

$$य^२+र^२=क$$

हा ट च्या पथाचा समीकार मिळतो.

पण हा सहायवृत्ताचा समीकार आहे.

म्हणून ट बिंदु सहायवृत्तावर असला पाहिजे. त्याचप्रमाणे ट$'$ बिंदूसुद्धा सहायवृत्तावर असला पाहिजे. (हा गुणधर्म या अनुच्छेदाच्या शेवटीं रखिकीने सिद्ध केला आहे.)

न $(-क उ, ०)$ पासून

$$र=घ य+\sqrt{क^२ घ^२+ख^२}$$

किंवा $$घय-र+\sqrt{क^२ घ^२+ख^२}=०$$

या स्पर्शरेषेवर काढलेल्या नट लंबाची लांबी

$$\frac{-घ क उ+\sqrt{क^२ घ^२+ख^२}}{\sqrt{१+घ^२}}$$

$$\therefore \quad नट=\frac{\sqrt{क^२ घ^२+ख^२}-घकउ}{\sqrt{१+घ^२}}$$

तसच $$न'ट'=\frac{\sqrt{क^२ घ^२+ख^२}+घकउ}{\sqrt{१+घ^२}}$$

$$\therefore \quad नट.न'ट'=\frac{(\sqrt{कघ^२+ख^२}-घकउ)(\sqrt{क^२घ^२+ख^२}+घकउ)}{\sqrt{१+घ^२}\times\sqrt{१+घ^२}}$$

$$=\frac{क^२ घ^२+ख^२-घ^२ क^२ उ^२}{१+घ^२}$$

$$=\frac{ध^२क^२(१-उ^२)+ख^२}{१+ध^२}$$

$$\therefore\ नट.न'ट' = \frac{ध^२ख^२+ख^२}{१+ध^२}\ कारण\ क^२(१-उ^२)=ख^२$$

$$=\frac{ख^२(१+ध^२)}{१+ध^२}$$

$$=ख^२$$

न′ ब रेषा मट ला समांतर आहे हें सिद्ध करण्याकरिता पुढील रचना करा.

न′ब व नट वाढवून प बिंदूंत मिळूं द्या. मग, बटन व बटप त्रिकोणांत

(१) टब साधारण आहे;

(२) ∠बटन = ∠बटप, कारण प्रत्येकां लंबकोण आहे.

(३) ∠नबट = ∠पबट, (वर दिलेल्या पहिल्या गूणधर्मावरून) म्हणून हे दोन त्रिकोण सर्वांगसम आहेत.

∴ नब = पब

व नट = टप

आतां, पनन′ त्रिकोणांत

ट नप चा मध्यबिंदु आहे.

आणि म. नन′ चा मध्यबिंदु आहे.

म्हणून मट रेषा न′प ला म्हणजेच न′ ब ला समांतर आहे.

तसेंच मट′ रेषा नब ला समांतर आहे.

शिवाय ट व म नप आणि नन′ चे मध्यबिंदू असल्यामुळ

$$
\begin{aligned}
\text{मट} &= \tfrac{1}{2}\ \text{पन}' \\
&= \tfrac{1}{2}\ (\text{पब} + \text{बन}') \\
&= \tfrac{1}{2}\ (\text{पब} + \text{बन}') \quad \text{कारण नब} = \text{पब} \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot २\ \text{क} \quad \text{कारण नब} + \text{न}'\text{ब} = २\ \text{क} \\
&= \text{क}
\end{aligned}
$$

म्हणून ट बिंदु ऊनेंद्राच्या म या केंद्रापासून नेहमी क या अचल अंतरावर असतो.

अर्थात् ट चा पथ क ही त्रिज्या व म हें केंद्र असणारें वृत्त होय, म्हणजेच ट चा पथ ऊनेंद्राचें सहायवृत्त होय.

त्याचप्रमाणे ट′ बिंदूचा पथहि हेंच सहायवृत्त आहे हे सिद्ध करतां येईल.

१११.३ (३) ब शीं असलेला अभिलंब प्रधान व गौण अक्षांना अनुक्रमें ज व झ बिंदूंत मिळत असेल आणि मप रेषा या अभिलंबाला लंब असेल तर,

(१) $\text{बप} \cdot \text{बज} = \text{ख}^2$

आणि (२) $\text{बप} \cdot \text{बझ} = \text{क}^2$

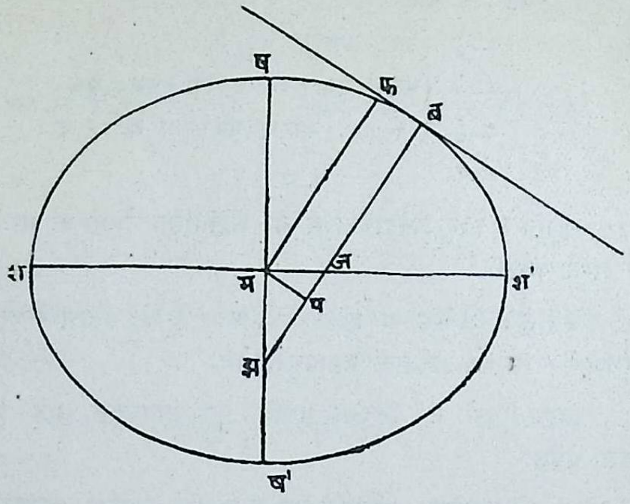
समजा की ब बिंदूचे याम (क कोज्या ए, ख ज्या ए) आहेत मग 'ए' बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{\text{य}}{\text{क}}\ \text{कोज्या ए} + \frac{\text{र}}{\text{ख}}\ \text{ज्या ए} = १$$

आता बप या रेषेवर म पासून असलेला लंब

$$= \text{फम}$$

$$\therefore\ \text{बप} = \frac{१}{\sqrt{\dfrac{\text{कोज्या}^2\text{ए}}{\text{क}^2} + \dfrac{\text{ज्या}^2\text{ए}}{\text{ख}^2}}}$$



आ. ९०

$$= \frac{\text{कख}}{\sqrt{\text{ख}^2 \text{कोज्या}^2 \text{ए} + \text{क}^2 \text{ज्या}^2 \text{ए}}} \qquad (१)$$

ब शीं असलेला अभिलंब

$$\frac{\text{कय}}{\text{कोज्या ए}} - \frac{\text{खर}}{\text{ज्या ए}} = \text{क}^2 - \text{ख}^2 \qquad (२)$$

हा अभिलंब प्रधान अक्षाला म्हणजेच र = ० ला ज मधे मिळतो.

म्हणून समीकार (२) मधे र = ० ठेवून

$$\frac{\text{कय}}{\text{कोज्या ए}} = \text{क}^2 - \text{ख}^2$$

किंवा $$\text{य} = \frac{(\text{क}^2 - \text{ख}^2)\ \text{कोज्या ए}}{\text{क}}$$

म्हणून ज चे याम

$$\left(\frac{(क^2 - ख^2)}{क} \text{ कोज्या } ए, ० \right)$$

हे होत.

$$\therefore \quad बज^2 = \left(क \text{ कोज्या } ए - \frac{क^2 - ख^2}{क} \text{ कोज्या } ए \right)^2$$

$$+ \left(ख \text{ ज्या } ए - ० \right)^2$$

$$= \text{कोज्या}^2 ए \left(\frac{क^2 - क^2 + ख^2}{क} \right) + ख^2 \text{ज्या}^2 ए$$

$$= \frac{ख^4}{क^2} \text{ कोज्या}^2 ए + ख^2 \text{ज्या}^2 ए$$

$$\therefore \quad बज = \frac{ख}{क} \sqrt{ख^2 \text{कोज्या}^2 ए + क^2 \text{ज्या}^2 ए} \qquad (३)$$

म्हणून (१) व (३) वरून

$$बप \cdot बज = \frac{क\, ख}{\sqrt{ख^2 \text{ कोज्या}^2 ए + क^2 \text{ज्या}^2 ए}}$$

$$\times \frac{ख}{क} \sqrt{ख^2 \text{कोज्या}^2 ए + क^2 \text{ज्या}^2 ए}$$

$$= ख^2$$

तसेंच, समीकार (२) मधे य = ० ठेवून

$$र = - \frac{क^2 - ख^2}{ख} \text{ ज्या } ए$$

म्हणून 'झ' बिंदूचे याम $\left(०, - \frac{क^2 - ख^2}{ख} \text{ ज्या } ए \right)$

हे होत.

$$\therefore \quad बझ^2 = क^2 काज्या^2 ए + \left[ख ज्या ए + \frac{क^2 - ख^2}{ख} ज्या ए \right]^2$$

$$= क^2 कोज्या^2 ए + \frac{क^4}{ख^2} ज्या^2 ए$$

$$\therefore \quad बझ = \frac{क}{ख} \sqrt{ख^2 कोज्या^2 ए + क^2 ज्या^2 ए} \qquad (४)$$

म्हणून समीकार (१) व (४) वरून

$$बप . बझ = \frac{कख}{\sqrt{ख^2 कोज्या^2 ए + क^2 ज्याए^2}}$$

$$\frac{क}{ख} \sqrt{ख^2 कोज्या^2 ए + क^2 ज्या^2 ए}$$

$$= क^2$$

उदाहरणसंग्रह १५

(१) एका बिंदूचो $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेंद्रासंबंधीची स्पर्शजीवा केंद्राशीं लंबकोण आपातित करीत असल्यास त्या बिंदूचा पथ काढा. (दिल्ली १९३४)

(२) ऊनेंद्राला अनुलक्षून ब या एका बिंदूची स्पर्शजीवा त्याच्या केंद्रापासून 'त' या स्थिर अंतरावर आहे. तर ब चा पथ काढा. (त्रावणकोर १९४०)

(३) नियतवृत्तावरील बिंदूंच्या $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} = १$ या ऊनेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या स्पर्शजीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ

$$(य^{2}+र^{2})=(क^{2}+ख^{2}) \left(\frac{य^{2}}{क^{2}}+\frac{र^{2}}{ख^{2}}\right)^{2}$$

आहे हें दाखवा.

(आंध्र १९४०)

(४) $\frac{य^{2}}{क^{2}}+\frac{र^{2}}{ख^{2}}=१$ या ऊनेंद्राच्या ज्या जीवा केंद्राशीं लंबकोण आपातित करतात त्या जीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ

$$क^{2}ख^{2}(ख^{4}य^{2}+क^{4}र^{2})=(क^{2}+ख^{2})(ख^{2}य^{2}+क^{2}र^{2})^{2}$$

हें दाखवा.

(आंध्र १९४१)

(५) ऊनेंद्राच्या ज्या जीवा एका संकेंद्र (concentric) व समाक्ष (coaxal) ऊनेंद्राला स्पर्श करितात त्या जीवांच्या ध्रवांचा पथ दुसरें एक संकेंद्र व समाक्ष ऊनेंद्र आहे हें सिद्ध करा.

(कलकत्ता १९३५)

(६) $\frac{य^{2}}{क^{2}}+\frac{र^{2}}{ख^{2}}=क+ख$ हा ऊनेंद्र व $\frac{य \text{ कोज्या } ऊ}{क}+\frac{र \text{ ज्या } ऊ}{ख}=१$ ही रेषा यांच्या छेदनबिंदूंशीं काढलेल्या स्पर्शरेषा एकमेकांस लंब आहेत हें दाखवा.

(मैसूर १९३९)

(७) ऊनेंद्राच्या एक श्रेढीला एकच प्रधान अक्ष असल्यास त्यांच्या उत्थानांच्या टोकांशीं असलेल्या स्पर्शरेषा गौण अक्षावर एकाच बिंदूंत मिळतात हें सिद्ध करा.

(नागपूर १९३६)

(८) ऊनेंद्रावरील ब बिंदूशीं असलेला अभिलंब प्रधान अक्ष व गौण अक्ष यांना अनुक्रमें ज व झ बिंदूंत मिळतो. तर सिद्ध करा की

(१) ब शीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर नाभींपासून काढलेल्या लंबांचें हरात्मक मध्यक बज आहे.

(२) न, न′ नाभी असल्यास न, ब, न′, झ हे बिंदू संवृत्तीय आहेत.

(नागपूर १९४६)

(९) ऊनेंद्राच्या उत्थानाच्या एका टोकाशीं असलेला अभिलंब त्याच्या गौण अक्षाच्या एका टोकांतून जातो; तर त्याची उत्केंद्रता

$$उ^{४} + उ^{२} - १ = ०$$

या समीकारावरून मिळते हें सिद्ध करा. (आंध्र १९३३)

(१०) कखग, पफब हे त्रिकोण एका ऊनेंद्रांत अशा रीतीने अंतर्लिखित केले की कख पफ ला समांतर आणि कग षब ला समांतर आहे. खग रेषा ऊनेंद्राच्या केंद्रांतून जात असल्यास फब रेषाहि केंद्रांतून जाते हें सिद्ध करा. (बनारस १९४१)

(११) ब बिंदूच्या ध्रुवीयावर ऊनेंद्राच्या नाभींपासून काढलेल्या लंबांचा गुणाकार $न^{२}$ समान अचल असल्यास ब चा पथ

$ख^{४}य^{२}(न^{२} + क^{२} \times उ^{२}) + न^{२}क^{४}र^{२} = क^{४}ख^{४}$ हें ऊनेंद्र आहे हें सिद्ध करा.

(१२) ऊनेंद्रावरील ब बिंदूशीं असलेल्या अभिलंबाचा ध्रुव भ शीं असलेल्या अभिलंबावर असेल तर भ शीं असलेल्या अभिलंबाचा ध्रुव ब शीं असलेल्या अभिलंबावर राहतो हें दाखवा.

(१३) ऊनेंद्रावरील ब आणि भ हे दोन बिंदू दोन नाभींना जोडणाऱ्या चारहि रेषा बभ रेषेचा ध्रुव केंद्र असणाऱ्या वृत्ताला स्पर्श करतात हें दाखवा.

(१४) ब या कोणत्याहि बिंदूच्या ध्रुवीयावर ऊनेंद्राच्या केंद्रापासून मप हा लंब काढला आणि त्याच ध्रुवीयावर ब बिंदूपासून काढलेला बफ हा लंब वाढविला असतां प्रधान अक्षाला च बिंदूंत मिळतो. तर

(१) $मप . बच = ख^{२}$, आणि

(२) नाभींपासून ध्रुवीयावर काढलेल्या लंबांचा गुणाकार मप . चफ समान आहे, हें दाखवा.

(१५) $\frac{य^2}{क^2}+\frac{र^2}{ख^2}=१$ ऊनेंद्राच्या न आणि न′ या नाभींमधून जाणाऱ्या नाभीजीवा अनुक्रमें बभ आणि बभ′ असल्यास, भ आणि भ′ शीं असलेल्या स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूचा पथ

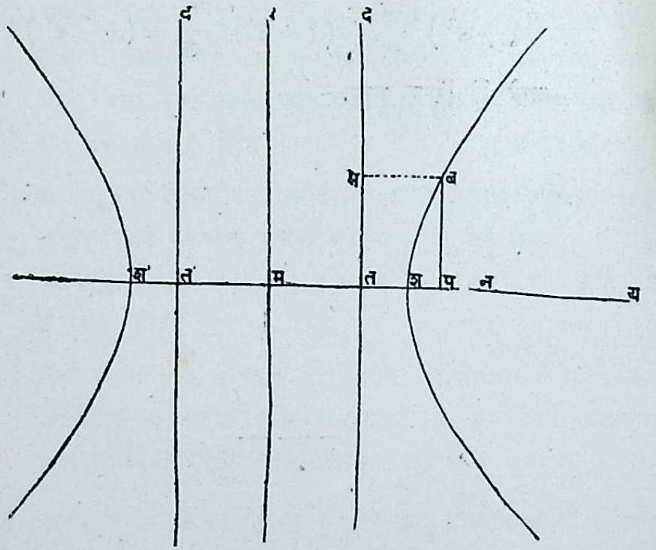
$$(१+उ^2)^2\frac{य^2}{क^2}+(१-उ^2)^2\frac{र^2}{ख^2}=(१+उ^2)^2$$

आहे हें सिद्ध करा.

प्रकरण ८ वें

अर्धींद्र

११२. ज्या शांकवांची उत्केंद्रता एकापेक्षा अधिक असते तो अर्धींद्र होय.



आ. ९१

तद रेषा ही अर्धींद्राची नियता आणि न हा बिंदु त्याची नाभि आहे असे समजा. न पासून नियतेला नत हा लंब काढून त्याच श बिंदूशीं अंतरतः, आणि श' बिंदूशीं बाह्यतः उ : १ या निष्पत्तींत भाजन करा.

$$\therefore \quad \text{नश} = \text{उ} \cdot \text{शत} \qquad (१)$$

$$\text{नश}' = \text{उ} \cdot \text{श}'\text{त} \qquad (२)$$

यावरून श आणि श' हे वक्रावरील बिंदु आहेत हें दिसून येईल. शश' चा मध्यबिंदु म ने आणि शश' ची लांबी २क ने दर्शविल्यास

(२) मधून (१) चा वियोग करून,

$$नश' - नश = उ (श'त - शत)$$

किंवा $$शश' = उ [(श'म + मत) - (मश - मत)]$$

किंवा $$२क = २उ.मत \quad (\because मश' = मश)$$

$$\therefore \quad मत = \frac{क}{उ} \qquad (३)$$

तसेंच, (१) व (२) चा योग करून

$$नश' + नश = उ (श'त + शत)$$

किंवा $$(मन + श'म) + (मन - मश) = उ [(श'म + मत) + (मश - मत)]$$

किंवा $$२ मन = उ.श'श \quad (\because मश = मश')$$

$$= २ उ.क$$

$$\therefore \quad शन = क.उ \qquad (४)$$

११३. अर्धींद्राचा समीकार

आता म मूलबिंदु, मनय य—अक्ष, आणि म बिंदूतून मय ला लंब असणारी मर रेषा र—अक्ष घ्या.

समजा, ब (य, र) हा अर्धींद्रावरील कोणताहि बिंदु आहे. ब पासून नियतेवर बभ हा लंब आणि शश' वर बप हा लंब काढा.

न चे याम (क उ, ०) आहेत.

ब हा वक्रावरील कोणताहि बिंदु असल्यामुळे तो

$$नब^2 = उ^2 . बभ^2 \qquad (१)$$

या संबंधाचें समाधान करतो.

पण $$नब^2 = (य - कउ)^2 + र^2$$

आणि $$बभ^2 = तप^2 = (मप - मत)^2$$

$$= \left(य - \frac{क}{उ}\right)^2$$

आता, नब व बभ यांच्या अर्हांचा (१) मधे आदेश करून

$$(य - क.उ)^2 + र^2 = उ^2 \left(य - \frac{क}{उ}\right)^2$$

किंवा $य^2 - २कउय + क^2 उ^2 + र^2 = उ^2 य^2 - २कउय + क^2$

किंवा $य^2 (उ^2 - १) - र^2 = क^2 (उ^2 - १)$

किंवा $क^2 (उ^2 - १)$ ने भागून

$$\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{क^2(उ^2 - १)} = १ \qquad (२)$$

अधोंद्राची उत्केंद्रता नेहमी १ पेक्षा अधिकअसल्यामुळे, $क^2 (उ^2 - १)$ ही राशी धन आहे. ती $ख^2$ ने दर्शविल्यास वरील समीकार प्रमाप रूपांत पुढीलप्रमाणे लिहितां येतो.

$$\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = १ \qquad (३)$$

आता $$ख^2 = क^2 (उ^2 - १)$$

$$= क^2 उ^2 - क^2$$

$$= मन^2 - मश^2$$

$$= मन^2 - क^2$$

$$\therefore \quad मन^2 = क^2 + ख^2 \qquad (४)$$

हा वक्र र अक्षास, म्हणजे य = ० ला, ज्या बिंदूंत मिळतो त्या बिंदूचे र-याम

$$- \frac{र^2}{ख^2} = १$$

किंवा $र^२ = - ख^२$.

या समीकारावरून मिळतात.

आता $-ख^२$ ऋण असल्यामुळ, र च्या अर्हा काल्पनिक होतील. यावरून हा वक्र र–अक्षाला वास्तविक बिंदूंत मिळत नाही.

११४. ऊनेंद्राप्रमाणे, $\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १$ हाहि समीकार

$$\frac{र^२}{ख^२} = \frac{य^२}{क^२} - १$$

$$= \frac{य^२ - क^२}{क^२}$$

$$\frac{र^२}{ख^२} = \frac{(य - क)(य + क)}{क^२} \qquad (१)$$

असा लिहितां येतो.

आता वक्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूचे याम (य, र) असल्यामुळे, आकृतीवरून (१) चें रूपांतर पुढे दिल्याप्रमाणे होतें.

$$\frac{बप^२}{ख^२} = \frac{शप \cdot पश'}{क^२}$$

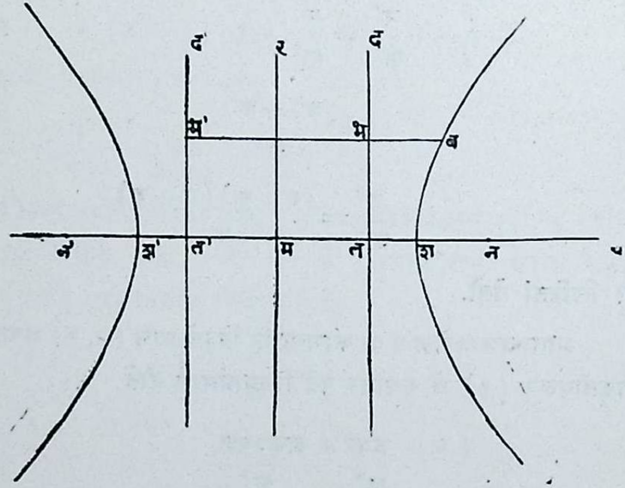
$$\therefore \quad \frac{बप^२}{शप \cdot पश'} = \frac{ख^२}{क^२}$$

र–अक्षावर म च्या विरुद्ध बाजूला ष व ष' हे बिंदू अशा प्रकारें घ्या की ष'म=मष=ख.

परिभाषाः—श,श' बिंदूंना अर्धींद्राचे शिरोबिंदू, म बिंदूला त्याचें केंद्र, शश' ला त्याचा अनुप्रस्थ-अक्ष (transverse axis) व षष' ला त्याचा अनुबद्ध-अक्ष (conjugate axis) असें म्हणतात.

अनुप्रस्थ–अक्ष व अनुबद्ध–अक्ष यांच्या लांबी अनुक्रमें २क व २ ख आहेत. म्हणून क व ख अनुक्रमें सामि–अनुप्रस्थ–अक्ष (semitransverse-axis) व सामि–अनुबद्ध–अक्ष (semi-conjugate axis) यांच्या लांबी दर्शवितात.

११५. वक्राला दुसरी नाभि आणि तिच्याशीं संवादी अशी दुसरी नियता असते.



आ. ९२

तद ही वक्राची नियता, न ही नाभि आणि ब (य,र) हा त्यावरील कोणताहि बिंदु आहे.

आता मूलबिंदूच्या ऋण बाजूला यं–अक्षावर त' व न' असें बिंदू घ्या की

$$\text{तम} = \text{मत}' = \frac{\text{क}}{\text{उ}}$$

आणि $\qquad नम = मन' = कउ.$

यावरून न' व त' चे याम अनुक्रमें $(-कउ, ०)$ व $\left(\frac{-क}{उ}, ०\right)$ होतील.

त'द' तत' ला आणि बभ' त'द' ला लंब काढा.

त'द' रेषेचा समीकार

$$य = -\frac{क}{उ}$$

किंवा $\quad य + \frac{क}{उ} = ०$

व पासन त'द' रेषेवर काढलेला लंब

$$बभ' = \left(य + \frac{क}{उ}\right) \qquad \text{(संख्येने)}$$

आणि $\qquad न'ब = \sqrt{(य + कउ)^२ + र^२} \qquad$ (संख्येने)

$$\therefore \quad \frac{न'ब}{बभ'} = \frac{\sqrt{(य + कउ)^२ + र^२}}{य + \frac{क}{उ}}$$

$$\therefore \quad \frac{न'ब^२}{बभ'^२} = \frac{(य + कउ)^२ + र^२}{\left(य + \frac{क}{उ}\right)^२}$$

पण ब (य, र) बिंदु वक्रावरील कोणताहि बिंदु असल्यामुळे

$$\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{क^२(उ^२ - १)} = १$$

किंवा $\quad \frac{र}{क^२(उ^२ - १)} = \frac{य^२}{क^२} - १$

किंवा $\quad र^२ = क^२ \, (उ^२ - १) \left[\frac{य^२}{क^२} - १\right]$

$$= (उ^2 - १) य^2 - क^2 (उ^2 - १)$$

$$\therefore \frac{न' ब^2}{ब भ'^2} = \frac{उ^2 [(य + कउ)^2 + (उ^2 - १) य^2 - क^2 (उ^2 - १)]}{(उय + क)^2}$$

$$= \frac{उ^2 [य^2 + २कउय + क^2 उ^2 + उ^2 य^2 - य^2 - क^2 उ^2 + क^2]}{(उय + क)^2}$$

$$\therefore \frac{न' ब^2}{ब भ'^2} = \frac{उ^2 [उ^2 य^2 + २कउय + क^2]}{(उय + क)^2}$$

$$= \frac{उ^2 (उय + क)^2}{(उय + क)^2}$$

$$= उ^2$$

$$\therefore \frac{न' ब}{ब भ'} = उ$$

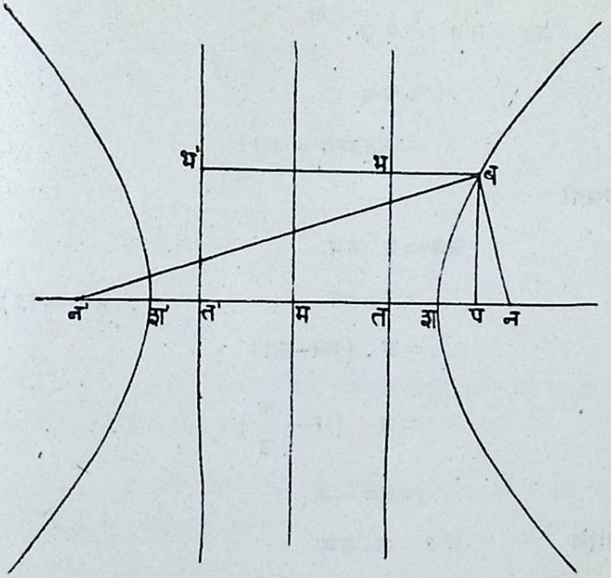
न'ब व ब भ' यांच्या केवळ लांबींशींच आपणांस कर्तव्य असल्यामुळे ही निष्पत्ति धन घेतली आहे.

या निष्पत्तीवरून असें दिसून येईल की वक्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूचें न' या बिंदूपासूनचें अंतर त्याच्या त' द' या स्थिर रेषेपासूनच्या अंतराच्या नेहमी उ—पट असतें.

या गुणधर्मामुळे न' हा बिंदु व त'द' ही त्याची संवादी रेषा वक्राची नाभि व नियता आहेत.

यावरून वक्राला दुसरी नाभि व तिच्याशीं संवादी असणारी दुसरी नियता असते हें दिसून येईल.

११६. अधोन्द्रावरील कोणत्याहि बिंदूच्या नाभ्यंतरांचा वियोग त्याच्या अनुप्रस्थ–अक्षासमान असतो.



आ. ९३

समजा ब (य,र) हा अधींद्रावरील कोणताहि बिंदु आहे.

आकृतीवरून

नब = उ . बभ

व न'ब = उ . बभ'

∴ नब ∾ न'ब = उ . (बभ ∾ बभ')

= उ . भभ'

= उ . तत'

= २उ . मत

परंतु $\quad$ मत $= \frac{क}{उ}$

$\therefore$ नब $\backsim$ न$'$ब $= २\, उ \,.\, \frac{क}{उ}$

$= २क$

$=$ अनुप्रस्थ — अक्ष

अन्यथा

$$नब = उ \,.\, बभ$$
$$= उ \,.\, पत \qquad (\therefore बभ = पत)$$
$$= उ \,.\, (मप - मत)$$
$$= उ \quad \left(य - \frac{क}{उ}\right)$$
$$= उय - क$$

आणि

$$न'ब = उ \,.\, बभ'$$
$$= उ \times पत' \qquad (\because बभ' = पत')$$
$$= (मप + मत')$$
$$= उ \quad \left(य + \frac{क}{उ}\right)$$
$$= उय + क$$

वर दिलेले संबंध ब बिंदूचीं अनुक्रमें न आणि न$'$ पासूनचीं नाभ्यंतरें देतात. आणि त्यांवरून

$$न'ब \backsim नब = (उय + क) \backsim (उय - क)$$
$$= २\, क$$

११७. $\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १$ या वक्राचें अनुरेखण करणे.]

$$\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १ \text{ हा समीकार}$$

$$र = \pm ख \frac{य^२}{क^२} - १ \qquad (१)$$

$$\text{अथवा} \quad य = \pm क \sqrt{\frac{र}{ख^२} + १} \qquad (२)$$

असा लिहितां येतो.

म्हणून या दोन समीकारांपैकी कोणत्याहि एकाचें समाधान करणारे बिंदू वक्रावर असतात.

आता $य < क$ आणि $य > -क$ या, अर्थात् $-क$ आणि $+क$ मध्ये असणाऱ्या य च्या अर्हांकरिता

$$य^२ < क^२$$

किंवा $$\frac{य^२}{क^२} < १$$

म्हणून $\frac{य^२}{क^२} - १$ ही करणीगत राशी ऋण असते. म्हणून य च्या ह्या अर्हांकरिता, $+ ख \sqrt{\frac{य^२}{क^२} - १}$ ही समीकार (१) मधील राशी काल्पनिक असते.

म्हणून य च्या ह्या अर्हांकरिता र ला कोणतीहि वास्तविक अर्हा नसते.

∴ वक्राचा कोणताहि भाग य=क आणि य=—क या रेषां-मध्ये नसतो.

आता य$>$क आणि य$<$—क असतांना

$$य^२ > क^२$$

किंवा
$$\frac{य^२}{क^२} > १$$

∴ $\frac{य^२}{क^२} - १$ ही करणीगत राशी धन असते.

∴ य च्या ह्या अर्हांकरिता समीकार (१)

मधील $\pm ख \sqrt{\frac{य^२}{क^२} - १}$ ही राशी वास्तविक असते.

∴ य च्या अशा प्रत्येक अर्हेकरिता र ला दोन समान पय विरुद्ध चिन्हांच्या अर्हा असतात. यावरून अधीन्द्र य-अक्षाभोवती संमिती असतो हें दिसून येतें.

आता य ची महत्ता जशीजशी वाढत जाते तसा तसा र हि संख्येने वाढत जाते. जेव्हा य अनंताइतका मोठा होतो तेव्हा र हि अनंताइतका मोठा होतो.

पुन्हा र च्या कोणत्याहि अर्हेकरिता $\frac{र^२}{ख^२} + १$ ही राशी नेहमी धन असते.

म्हणून समीकार (२) मधील $\pm क \sqrt{\frac{र^२}{ख^२} + १}$ ही राशी नेहमी वास्तविक असते.

∴ र च्या कोणत्याहि अर्हेशीं संवादी असणाऱ्या य च्या दोन समान

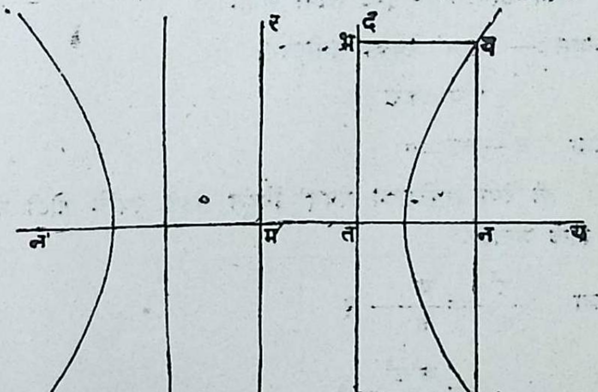
परंतु विरुद्ध चिन्हांच्या अर्हा असतात. यावरून अर्धींद्र र-अक्षाभोवती संमितीय असतो हें दिसून येतें.

यावरून अर्धींद्र दोन्ही अक्षांभोवती संमितीय असतो.

आता य च्या अनेक अर्हा क्रमाने घेऊन त्यांच्याशीं संवादी असणाऱ्या र च्या अर्हा ठरविल्यास आपणांला, या अर्हा याम असणारी बिंदूंची एक श्रेणी मिळेल. या सर्व बिंदूंचें अनुरेखण केलें असतां ते अनुच्छेद ११२ मधील आकृतींत दाखविलेल्या आकाराच्या वक्रावर आहेत असें दिसून येईल.

या वक्राला दोन शाखा आहेत. एक शाखा र-अक्षाच्या धनदिशेने अनंतापर्यंत जाते व दुसरी त्याच्या ऋण दिशेने अनंता-पर्यंत जाते.

११८. $\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = 1$ या अर्धींद्राचें उत्थान



आ. ९४

थनथ' ही न नाभींतून काढलेली द्विगुणकोटि आहे.

अर्धोद्राच्या परिभाषेवरून,

सामि–उत्थान नथ $=$ उ $\times$ (थ चें तद नियतेपासून अंतर)

$$= \text{उ}.\text{नत}$$

$$= \text{उ}(\text{मन} - \text{मत})$$

$$= \text{उ}\left(\text{कउ} - \frac{\text{क}}{\text{उ}}\right)$$

परंतु $\quad \text{ख}^{२} = \text{क}^{२}(\text{उ}^{२} - १)$

किंवा $\quad \text{उ}^{२} - १ = \frac{\text{ख}^{२}}{\text{क}^{२}}$

$$\therefore \quad \text{नथ} = \text{क}.\ \frac{\text{ख}^{२}}{\text{क}^{२}}$$

$$= \frac{\text{ख}^{२}}{\text{क}}$$

ही सामि–उत्थानाची इष्ट लांबी आहे.

अन्यथा :— थनथ' रेषेचा समीकार.

$$\text{य} = \text{कउ}$$

किंवा $\quad \text{य} - \text{कउ} = ०$

ही रेषा अर्धोद्राला थवथ' बिंदूंत छेदते. त्यांचे कोटी नथ $=$ र ने दिले जातात.

आता $\quad \frac{\text{र}^{२}}{\text{ख}^{२}} = \frac{\text{य}^{२}}{\text{क}^{२}} - १$

$$= \frac{\text{क}^{२}\text{उ}^{२}}{\text{क}^{२}} - १$$

$$= \text{उ}^{२} - १$$

किंवा $\quad \text{र}^{२} = \text{ख}^{२}(\text{उ}^{२} - १)$

परंतु $\quad \text{ख}^{२} = \text{क}^{२}(\text{उ}^{२} - १)$

किंवा $उ^२ - १ = ख^२ . \frac{ख^२}{क^२}$

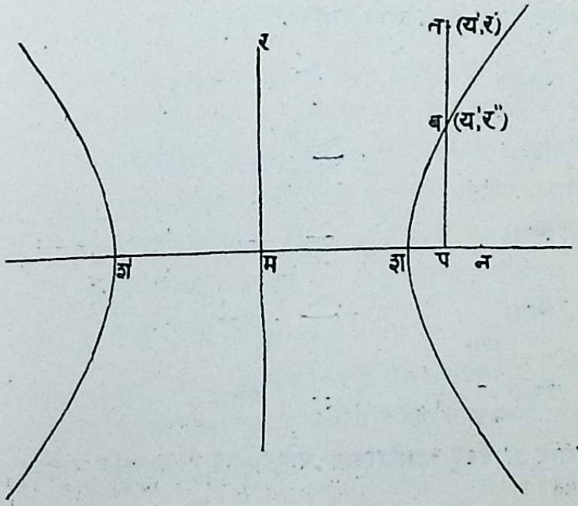
$\therefore \quad र^२ = ख^२ \frac{ख^२}{क^२}$

$\therefore \quad र^२ = \frac{ख^२}{क^२}$

$\therefore \quad र = \pm \frac{ख^२}{क}$

म्हणून नथ अथवा नथ$'$ या सामि–उत्थानाची लांबी $= \frac{ख^२}{क}$

११९. $\frac{य'^२}{क^२} - \frac{र'^२}{ख^२} - १$ ही राशी ऋण, शून्य किंवा धन असेल तदनुसार ($य'$,$र'$) हा बिंदु अर्धीद्राच्या बाहेर, वर किंवा आंत असतो.



आ. ९५

समजा त हा (य', र') बिंदु आहे. तप ही कोटि

$\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १$ या अधींद्राला ब बिंदूंत छेदते.

समजा (य', र'') हे ब चे याम आहेत.

आता ब (य', र'') हा बिंदु $\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १$ या अधींद्रावर

असल्यामुळे

$$\frac{य'^२}{क^२} - \frac{र''^२}{ख^२} = १$$

किंवा $$\frac{र''^२}{ख^२} = \frac{य'^२}{क^२} - १$$

आकृतीवरून तप $\lessgtr$ बप असेल तदनुसार त बिंदु अधींद्राच्या

बाहेर, वर किंवा आंत राहील.

म्हणून $$र' \lesseqgtr र''$$ असेल

किंवा $$\frac{र'^२}{ख^२} \lesseqgtr \frac{र''^२}{ख^२}$$ "

किंवा $$\frac{र'^२}{ख^२} \lesseqgtr \frac{य'^२}{क^२} - १ \;\; \left(\because \frac{र''^२}{ख^२} = \frac{य'^२}{क^२} - १ \right)$$

किंवा $$० \lesseqgtr \frac{य'^२}{क^२} - \frac{य'^२}{क^२} - १$$

किंवा $$\frac{य'^२}{क^२} - \frac{र'^२}{ख^२} - १ \lesseqgtr ०$$ असेल

तदनुसार त बिंदु अधींद्राच्या बाहेर, वर किंवा आंत राहील.

अर्धींद्र

उदाहरणसंग्रह १६

(१) खालील अर्धींद्रांचें अनुरेखण करा :—

(१) १६ $य^2$ — ४ $र^2$ = ६४ (नागपूर १९२६)

(२) ९ $य^2$ — ४ $र^2$ = ३६ (नागपूर १९२९)

(३) ४ $य^2$ — ९ $र^2$ = ३६ (नागपूर १९४६)

प्रत्येक प्रकारांत, उत्केंद्रता, नाभींमधोल आणि सामिउत्थानाची लांबी काढा.

(२) ध च्या सर्व अर्हांकरिता,

$$\frac{य}{क}+\frac{र}{ख}=\frac{१}{ध} \text{ आणि } \frac{य}{क}-\frac{र}{ख}=ध$$ या रेषांच्या छेदन-बिंदूचा पथ नेहमी एक अर्धींद्र असतो हें दाखवा.

(३) एका अर्धींद्राची पब ही कोटि भ पर्यंत अशा रीतीने वाढविली की पभ ब च्या एका नाभ्यंतरासमान होते. तर भ चा पथ एका समांतर रेषायुग्मांतील कोणतीतरी एक रेषा आहे हें सिद्ध करा.

(४) एका त्रिकोणाचा आधार दिला असून आधारापासच्या अर्धकोणांच्या स्पर्शज्यांची निष्पत्ति दिलेली आहे. तर त्या त्रिकोणाच्या शिरो-बिंदूचा पथ आधाराचीं दोन टोकें नाभी असलेला अर्धींद्र आहे हें सिद्ध करा.

(५) ब बिंदु अशा रीतीने फिरतो की त्याच्या न आणि न' या दोन स्थिर बिंदूंपासूनच्या अंतरांमधील फरक ३ आहे. नन' ची लांबी ८ असल्यास ब च्या पथाचा समीकार काढा.

---

१२०. अधींद्र आणि ऊनेंद्र यांच्या प्रमाप समीकारांतील फरक केवळ ख^{२} च्या चिन्हांतच असल्यामुळे, अधींद्राचे बरेसचे सिद्धांत, ऊनेंद्राच्या सिद्धांतांत ख^{२} ऐवजी —ख^{२} लिहून काढतां येतात. हे सर्व सिद्धांत संकलित स्वरूपांत सिद्धतेशिवाय पुढे दिले आहेत. उनेंद्राच्या संवादी सिद्धांतांचे अनुच्छेद कंसांत दिले आहेत.

(१) र = धय + ग

ही रेषा अधींद्राला,

$$\text{ग}^{२} \gtrless \text{क}^{२}\text{ध}^{२} - \text{ख}^{२}$$

असेल, तदनुसार दोन वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती अथवा काल्पनिक बिंदूंत छेदते. (१०१)

(२) (य', र') बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{\text{यय}'}{\text{क}^{२}} - \frac{\text{रर}'}{\text{ख}^{२}} = १ \qquad (१०३)$$

(३) (य', र') बिंदूशीं असणाऱ्या अभिलंबाचा समीकार

$$\frac{\text{य} - \text{य}'}{\text{य}'/\text{क}^{२}} = \frac{\text{र} - \text{र}'}{\text{र}'/\text{ख}^{२}} \qquad (१०४)$$

(४) र = धय + ग

ही अधींद्राची स्पर्शरेषा होण्यास प्रतिबंध

$$\text{ग}^{२} = \text{क}^{२}\text{ध}^{२} - \text{ख}^{२}$$

म्हणून 'ध' च्या कोणत्याहि अर्हंकरिता,

$$\text{र} = \text{धय} + \sqrt{\text{क}^{२}\text{ध}^{२} - \text{ख}^{२}}$$

ही नेहमी अधींद्राची स्पर्शरेषा असते. (१०१·१)

(५) य कोज्या अ+र ज्या अ = ल

ही अधींद्रास स्पर्शरेषा असण्याकरिता प्रतिबंध

$$ल^{२} = क^{२} कोज्या^{२} अ - ख^{२} ज्या अ \qquad (१०१·२)$$

(६) त . य + थ . र = द

ही अधींद्रास स्पर्षरेषा होण्याकरिता प्रतिबंध

$$द^{२} = क^{२}त^{२} - ख^{२}थ^{२} \qquad (१०१·३)$$

१२१. $\frac{य^{२}}{क^{२}} - \frac{र^{२}}{ख^{२}} = १$ या अर्धींद्राचें केंद्र मूलबिंदूच असतो व त्याचा गुणधर्म हा आहे की त्यांतून जाणाऱ्या व वक्राला दोन्ही बाजूंनी मिळणाऱ्या सर्व जीवा त्याच्याशीं दुभागल्या जातात.

म्हणून अनुच्छेद (९८) मध्ये उनेंद्राकरिता सिद्ध केल्याप्रमाणे, (य′, र′) हा अधींद्रावर बिंदु असल्यास (−य′, −र′) हाहि बिंदु त्याच अधींद्रावर असतो हें सिद्ध करतां येतें. म्हणजे मूलबिंदु या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या जीवेचा मध्यबिंदु असतो.

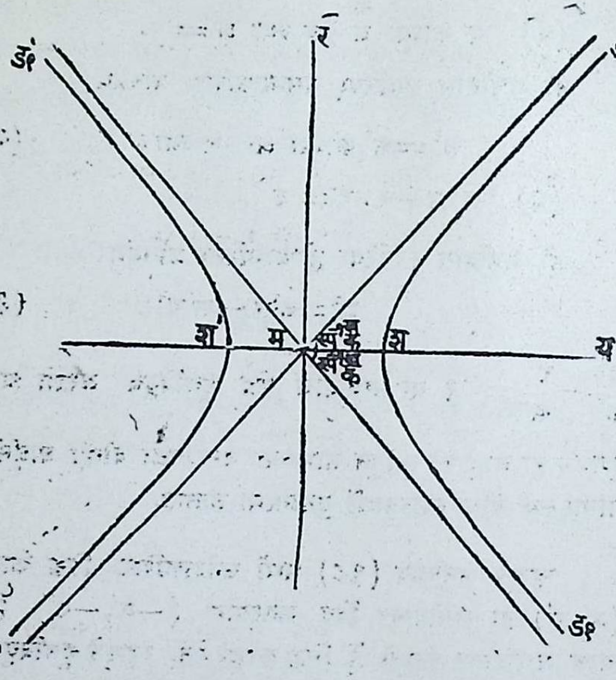
म्हणून इष्ट प्रमेय.

∴ केंद्र असणाऱ्या व केंद्रातून जाणाऱ्या सर्व जीवा केंद्राशीं दुभागल्या जाण्याच्या गुणधर्मामुळेच अधींद्र व ऊनेंद्र "केंद्रीय शांकव" गणले जातात.

१२१.१. दिलेल्या दिशेने काढलेल्या केंद्रीय त्रिज्येची लांबी काढणें.

$$\frac{य^{२}}{क^{२}} - \frac{र^{२}}{ख^{२}} = १$$

ह्या समीकार ध्रुवीय रूपांत व्यक्त करून,



आ. ९६

$$\text{त्र}^{2}\left(\frac{\text{कोज्या}^{2}\,\text{ऊ}}{\text{क}^{2}}-\frac{\text{ज्या}^{2}\,\text{ऊ}}{\text{ख}^{2}}\right)=१$$

$$\text{किंवा}\ \frac{१}{\text{त्र}^{2}}=\frac{\text{कोज्या}^{2}\,\text{ऊ}}{\text{क}^{2}}-\frac{\text{ज्या}^{2}\,\text{ऊ}}{\text{ख}^{2}}$$

$$=\frac{\text{कोज्या}^{2}\,\text{ऊ}}{\text{ख}^{2}}\left(\frac{\text{ख}^{2}}{\text{क}^{2}}-\text{स्प}^{2}\,\text{उ}\right) \qquad (१)$$

असा लिहितां येतो.

या समीकारावरून अनुप्रस्थ–अक्षांशीं ऊ कोण करणाऱ्या केंद्रीय त्रिज्येची अर्हा काढतां येते.

आता $स्प^2 ऊ < \frac{ख^2}{क^2}$ असल्यास ऊ च्या कोणत्याहि अर्हेशीं संवादी असलेल्या त्र च्या दोन समान पण विरुद्ध चिन्हांच्या वास्तविक अर्हा मिळतात.

आणि $स्प^2 ऊ > \frac{ख^2}{क^2}$ असल्यास ऊ शीं संवादी असलेल्या $\frac{१}{त्र^2}$ च्या अर्हा ऋण म्हणून त्र च्या अर्हा काल्पनिक असतात.

आता $\overset{-1}{स्प} \frac{ख}{क}$ पेक्षा अधिक नति असलेली कोणतीहि केंन्द्रीय त्रिज्या वक्राला कोणत्याहि वास्तविक बिंदूंत मिळत नाही. त्यामुळे संबंध वक्र म मधून जाणाऱ्या व मय शीं $\pm \overset{-1}{स्प} \frac{ख}{क}$ कोण करणाऱ्या दोन रेषांमध्येच राहतो.

म्हणून केंद्रांतून जाणारी व अनुप्रस्थ अक्षाशीं $स्प ऊ < \frac{ख}{क}$ हा प्रतिबंध पाळून ऊ कोण करणारी कोणतीहि रेषा वक्राला केंद्रापासून समान अंतरावर परंतु विरुद्ध बाजूला (वक्राच्या दोन भिन्न शाखावर) असलल्या दोन बिंदूंत मिळते.

यावरून केंद्रांतून जाणाऱ्या व वक्राने सीमित केलेल्या अर्धींद्राच्या सर्व जीवा केंद्राशीं दुभागल्या जातात.

१२१.२ समीकार (१)

$$त्र^2 = \frac{ख^2}{कोज्या^2 ऊ \left(\frac{ख^2}{क^2} - स्प^2 ऊ \right)}$$

या रूपांत लिहितां येतो.

आता त्र लघुत्तम होण्यास हर ... सावयास पाहिजे।

कोज्या^{२} ऊ ची महत्तम अर्हा १ आहे. ($\frac{ख^{२}}{क^{२}}$ — स्प^{२} ऊ) महत्तम होण्याकरिता स्प^{२} ऊ अल्पिष्ठ म्हणजे शून्य अर्थात् ऊ = ० असावयास पाहिजे.

म्हणून मश व मश$'$ या त्रिज्याच लघुत्तम केंद्रीय त्रिज्या होत.

त्याचप्रमाणे स्पऊ = $\pm \frac{ख}{क}$ असल्यास हराची अर्हा शून्य होते. व त्यामुळे त्र ची अर्हा अनंत होते.

आता ऊ च्या शून्य आणि स्प$^{-१}$ $\frac{ख}{क}$ मध्ये असणाऱ्या अर्हांशी संवादी असणाऱ्या त्र च्या धन अर्हांकरिता शड हा भाग व त्र च्या ऋण अर्हांकरिता वक्राचा श$'$ उ$'$ हा भाग मिळतो.

त्याचप्रमाणे ऊ च्याशून्य आणि — स्प$^{-१}$ $\frac{ख}{क}$ मध्ये राहणाऱ्या अर्हांशीं संवादी असणाऱ्या त्र च्या धन अर्हांकरिता वक्राशा शड$_{१}$ ह भाग व ऋण अर्हांकरिता श$'$ड$'_{१}$ हा भाग मिळतो.

१२२ प्राचल याम :—

अर्धोद्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम आपण 'ए' प्राचलाच्या पदांत पुढीलप्रमाणे व्यक्त करूं शकतो.

अर्धोद्राच्या समीकारांत

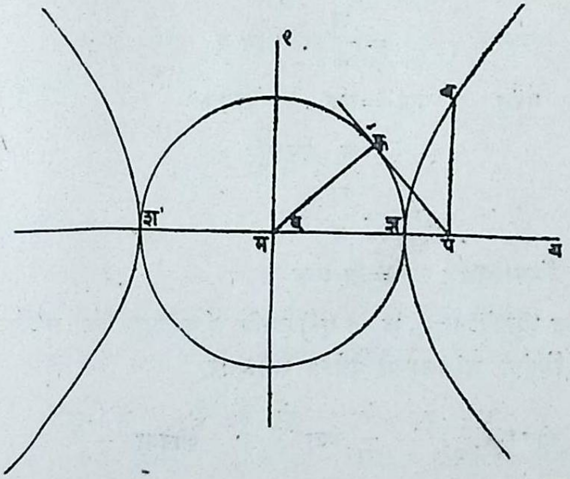
य=क व्युत्कोज्या ए

व र=ख स्प ए

यांचा आदेश केला असतांना त्याचें पूर्ण समाधान होतें हें दिसून येईल. म्हणून अर्धोद्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम (क व्युत्कोज्या ए, ख स्प ए) या रूपांत अर्थात 'ए' ह्या प्राचलाच्या पदांत व्यक्त करतां यतात.

१२२.१ 'ए' कोणाचा रैखिकीय-अर्थ, सहायवृत्ताला अनुसरून पुढीलप्रमाणे सोप्या रीतीने व्यक्त करतां येतो.

शश′ व्यास घेऊन सहायवृत्त काढा.



आ. ९७

आणि बप या कोणत्याहि कोटीच्या प या पायापासून सहायवृत्ताला पफ ही स्पर्शरेषा काढा. मफ सांधा.

आता मफ=मप . कोज्या पमफ

∴ मप=मफ . व्युत्कोज्या पमफ

किंवा य=मप=मफ व्युत्कोज्या पमफ

=क व्युत्कोज्या पमफ

परंतु ब बिंदु प्राचल ए ने दर्शविल्यास

य=क व्युत्कोज्या ए

∴ ∠पमफ=ए

१२२.२. अर्धींद्राची कोणतीहि कोटि, तिच्या पायापासून सहायवृत्ताला काढलेल्या स्पर्शरेषेच्या लांबीशीं अचल निष्पति धारण करते.

आता वरील आकृतीवरून

$$र = पब = ख \text{ स्प } ए$$

$$= \frac{ख}{क} . क \text{ स्प } ए$$

परंतु $पफ = मफ . \text{स्प } शमफ$

$$= क . \text{ स्प } ए$$

$$\therefore \quad पब = \frac{ख}{क} पफ$$

किंवा $पब : पफ = ख : क$

१२२.३ (क व्युत्कोज्या ए, ख स्प ए) आणि (क व्युत्कोज्या ए′, ख स्प ए′) या बिंदूंना सांधणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$\frac{य}{क} \text{कोज्या} \frac{ए' - ए}{२} - \frac{र}{ख} \text{ज्या} \frac{ए + ए'}{२} = \text{कोज्या} \frac{ए + ए'}{२}$$

असा लिहितां येतो.

आता या समीकारांत $ए = ए'$ घेतलें असतांना (क व्युत्कोज्या ए, ख स्प ए) बिंदूशीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{य}{क} - \frac{र}{ख} \text{ज्या } ए = \text{कोज्या } ए$$

त्याचप्रमाणे ‘ए’ बिंदूशीं असणाऱ्या अभिलंबाचा समीकार

$$क\, य \text{ ज्या } ए + ख\, र = (क^2 + ख^2) \text{ स्प } ए$$

१२३. वक्राला कोणत्याहि बिंदूपासून दोन वास्तविक व भिन्न, वास्तविक व संपाती अथवा काल्पनिक स्पर्शरेषा काढतां येतात हा सिद्धांत अर्धींद्राच्या बाबतींतहि सत्य आहे. व तो अनुच्छेद १०६ प्रमाणे सिद्ध करतां येतो.

अनुच्छेद १०८ प्रमाणे, ($य_१$, $र_१$) पासून काढलेल्या, स्पर्श-रेषांच्या स्पर्श जीवेचा समीकार

$$\frac{यय_१}{क^२} - \frac{रर_१}{ख^२} = १$$

तसेंच अनुच्छेद १०९ प्रमाणे, ($य_१$, $र_१$) बिंदूच्या ध्रुवीयाचा समीकार

$$\frac{यय_१}{क^२} - \frac{रर_१}{ख^२} = १$$

१२४. नियतवृत्त :—

अनुच्छेद १०७ प्रमाणे अधींद्राच्या बाबतींतहि परस्परांस लंबकोण करून छेदणाऱ्या त्याच्या दोन स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूचा पथ एक वृत्त असते आणि त्याचा समीकार

$$य^२ + र^२ = क^२ - ख^२$$

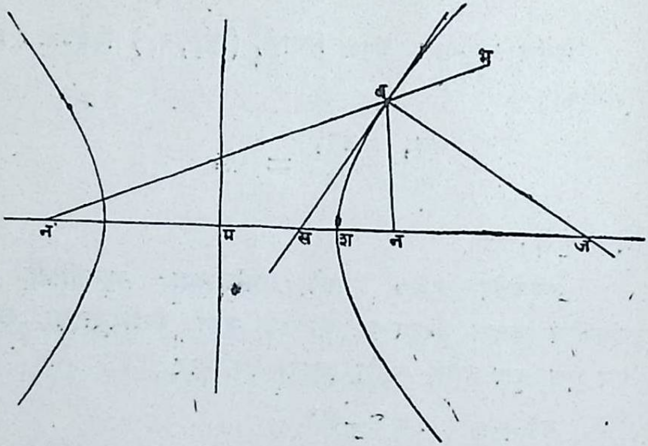
असून त्याची त्रिज्या $\sqrt{क^२ - ख^२}$ असते व त्याचें केंद्र मूलबिंदु असतें.

$ख^२ < क^२$ असेल तर $\sqrt{क^२ - ख^२}$ ही राशी वास्तविक असते म्हणून या प्रकारांत वरील वृत्त वास्तविक असतें.

जर $ख^२ = क^२$ असेल तर $\sqrt{क^२ - ख^२}$ ही राशी शून्य होते व वरील वृत्त मूलबिंदूशीं बिंदुवृतांत प्रह्लसित होतें. या प्रकारांत मूलबिंदु हाच एक असा बिंदु आहे की त्यापासून वक्राला परस्परांस लंबकोण करणाऱ्या स्पर्शरेषा काढतां येतात.

$ख^२ > क^२$ असेल तर $\sqrt{क^२ - ख^२}$ हो राशी काल्पनिक असते आणि म्हणून या प्रकारांत वरील वृत वास्तविक नसतें. म्हणून $ख^२ > क^२$ असल्यास वक्राला परस्परांस लंबकोण करणाऱ्या स्पर्शरेषा काढतां येत नाहीत.

१२५. अनुच्छेद १०५ आणि १११ मध्यें ऊनेंद्राकरिता दिलेले गुणधम थोडासा बदल करून व त्याप्रमाणे आकृति काढून, अधींद्राकरिताहि सत्य आहेत असें दिसून येईल.



आ. ९८

उदाहरणार्थ, अधींद्राच्या बाबतींतहि नब व न'ब या नाभ्यंतरांतील अंतःकोण ब शीं असणाऱ्या स्पर्शरेषेने व बाह्यकोण त्याच बिंदूशीं असणाऱ्या अभिलंबाने दुभागला जातो.

आकृतींत बस ही स्पर्शरेषा नबन' हा अंतःकोण व बज हा अभिलंब नबभ हा बाहचकोण दुभागतो.

या गुणधर्माला अनुसरून, ऊनेंद्र व अधींद्र यांच्या नाभी एकच असल्यास ते ब या कोणत्याहि साधारण बिंदूशीं परस्परांस लंबकोण करून छेदतात. याचें कारण त्या बिंदूशीं प्रत्येक वक्राला काढलेल्या स्पर्शरेषा नबन' कोणाचें बाहच व अंतर्द्विभाजक असतात.

१२६. समभुज अथवा आयात (rectangular) अधींद्रः—

ज्या अधींद्राचे अनुप्रस्थ-अक्ष आणि अनुबद्ध-अक्ष समान असतात त्याला **समभुज अथवा आयत अधींद्र** असे म्हणतात.

याला 'आयत अधींद्र' म्हणण्याचें कारण अनु० १२७.६ मधे दिलें आहे.

या अधींद्रांत क=ख असल्यामुळे, त्याचें केंद्र मूलबिंदू व त्याचें अक्ष यामाक्ष घेतल्यास त्याचा समीकार

$$य^{२} - र^{२} = क^{२}$$

होतो.

आयत अधींद्रांत $ख = क$

$$\text{पण} \quad ख^{२} = क^{२} (उ^{२} - १)$$

$$\text{म्हणून} \quad १ = उ^{२} - १$$

$$\text{किंवा} \quad उ^{२} = २$$

$$,, \quad उ = \sqrt{२}$$

म्हणून आयत अधींद्राची उत्केंद्रता $\sqrt{२}$ समान असते.

१२७. उपगा

शांकवाला अनंत अतरावर दोन संपाती बिंदूंत मिळणाऱ्या सरल रेषेला उपगा (asymptote) म्हणतात. अर्थात् स्पर्शबिंदु अनंतावर असणारी शांकवाची स्पर्शरेषा म्हणजेच उपगा होय. उपगेचा स्पर्शबिंदु अनंतावर असला तरी ती पूर्णतः अनंत अंतरावर नसते.

१२७.१. $\frac{य^{२}}{क^{२}} - \frac{र^{२}}{ख^{२}} = १$ या अधींद्राच्या उपगा काढणें.

अनुच्छेद १०१ मधे दिल्याप्रमाणे

$$र = धय + ग \qquad (१)$$

ही रेषा अधींद्राला ज्या बिंदूंत मिळते त्यांच भुजयाम

$$(\text{ख}^2-\text{क}^2\,\text{घ}^2)\,\text{य}^2-2\text{क}^2\text{धगय}-\text{क}^2(\text{ग}^2+\text{ख}^2)=0 \qquad (2)$$

या वर्गसमीकाराचीं मूळें होत.

आता सरळ रेषा (१) अधींद्राची उपगा होण्याकरिता, समीकार (२) चीं दोन्ही मूळें अनंत झालीं पाहिजेत.

बैजिकीने, समीकार (२) चीं दोन्ही मूळें अनंत असल्यास, य^2 आणि य यांचे गुणक प्रत्येकीं शून्य असले पाहिजेत.

म्हणून $\qquad \text{ख}^2-\text{क}^2\text{ध}^2=0$

व $\qquad \text{क}^2\,\text{धग}=0$

$\therefore \qquad \text{ध}=\pm\frac{\text{ख}}{\text{क}}$

व $\qquad \text{ग}=0$

समीकार (१) मधे या अर्हांचा आदेश करून

$$\text{र}=\pm\frac{\text{ख}}{\text{क}}\text{य}$$

म्हणून $\qquad \text{र}=\frac{\text{ख}}{\text{क}}\text{य}$

आणि $\qquad \text{र}=-\frac{\text{ख}}{\text{क}}\text{य}$

हें अधींद्राच्या उपगांचे समीकार होत.

दोन्ही उपगा केंद्रांतून जातात व य-अक्षाशीं समान कोण करतात हें सहज दिसून येईल.

दोन्ही उपगांचा एकत्रित समीकार

$$\left(\frac{\text{य}}{\text{क}}-\frac{\text{र}}{\text{ख}}\right)\left(\frac{\text{य}}{\text{क}}+\frac{\text{र}}{\text{ख}}\right)=0$$

किंवा $$\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = ०$$

१२७.२. उपसाध्य :- $ध = \pm \frac{ख}{क}$ असल्यास, ग च्या सर्व अर्हांकरितां, समीकार (२) चें एक मूळ अनंत होईल. म्हणून हा 'ध' असणारी कोणतीहि सरळरेषा (म्हणजेच एखाद्या उपगेला समांतर असणारी सरळ रेषा) अर्धोद्राला एका परिमित (finite) बिंदूंत आणि अनंतीवर दुसऱ्या बिंदूंत मिळेल.

ग शून्य होतो तेव्हा ही रेषा केंद्रातून जाते आणि परिमित बिंदु अनंतीवरील बिंदूशीं संपाती होतो. अशा वेळीं सरळ रेषा वक्राला अनंतीवर दोन संपाती बिंदूंत मिळते, अर्थात् ती अनंतीवर स्पर्शबिंदु असणारी स्पर्शरेषा होते. पण परिभाषेने अशी रेषा, उपगा होय. म्हणून शांकवाच्या उपगा म्हणजे त्याच्या केंद्रांतून काढलेलें स्पर्शरेषायुग्म, अशीहि परिभाषा करतां येईल.

१२७.३. एखाद्या उपेगवरील कोणत्याहि बिंदूपासून अनुप्रस्थ अक्षावर लंबरेषा काढल्यास तो बिंदु आणि वक्र यांच्यामधे खंडित झालेल्या रेषेच्या खंडांचा गुणाकार सामि अनुबद्ध अक्षाच्या वर्गासमान असतो.

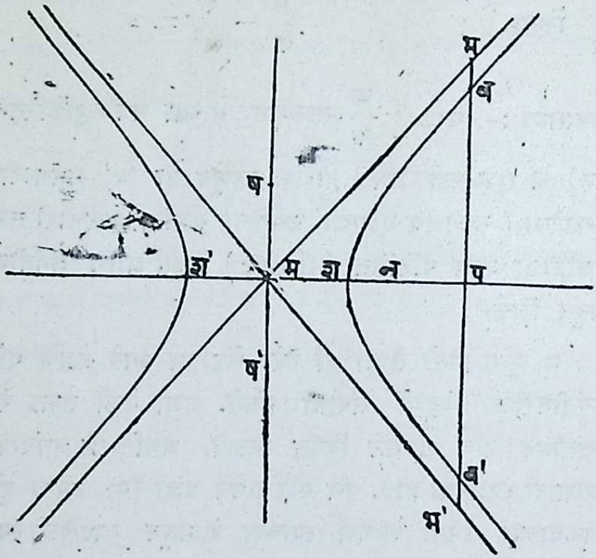
$\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = १$ या अर्धोद्राची बपब' ही द्विगुण कोटि दोन्ही बाजूंना वाढवून उपगांना भ व भ' मधे मिळूं द्या.

समजा की प चा भुज $य'$ आहे.

बपब' या द्विगुण कोटीचा समीकार $य = य'$ होईल.

ही रेषा अर्धोद्राला ज्या ब व ब' बिंदूंत मिळते त्याचे र—याम पुढील समीकाराने मिळतात.

$$\frac{य'^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = १$$



आ. ९९

किंवा, $\frac{र^2}{ख^2} = \frac{य'^2}{क^2} - १$

किंवा, $र = \pm \frac{ख}{क} \sqrt{य'^2 - क^2}$

$\therefore$ पब किंवा $पब' = \frac{ख}{क} \sqrt{य'^2 - क^2}$ (संख्येने)

त्याचप्रमाणें $य = य'$ ही रेषा $र = \frac{ख}{क} य$ या उपगेला मिळणाऱ्या भ बिंदूचा र–याम

$$र = \frac{ख}{क} य$$

या समीकारावरून मिळतो.

$$\therefore \quad पभ = \frac{ख}{क} य'$$

आता $$बभ = पभ - पब$$

$$= \frac{ख}{क} \left(य' - \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right)$$

आणि $$ब'भ = ब'प + पभ$$

$$= \frac{ख}{क} \sqrt{य'^{२} - क^{२}} + \frac{ख}{क} य'$$

$$= \frac{ख}{क} \left(य' + \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right)$$

$$\therefore बभ \cdot ब'भ = \frac{ख}{क} \left[य' - \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right] \times \frac{ख}{क} \left[य' + \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right]$$

$$= \frac{ख^{२}}{क^{२}} \left[य'^{२} - \left(य'^{२} - क^{२}\right)\right]$$

$$= \frac{ख^{२}}{क^{२}} \cdot क^{२}$$

$$= ख^{२}$$

म्हणून एखाद्या उपगेवरील कोणत्याहि बिंदूपासून अनुप्रस्थ अक्षावर लंब रेषा काढल्यास तो बिंदु आणि वक्र यांच्यामधे खंडित झालेल्या रेषेच्या खंडांचा गुणाकार सामि-अनुबद्ध अक्षाच्या वर्गासमान असतो.

१२७.४. पुन्हा $$बभ = \frac{ख}{क} \left(य' - \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right)$$

$$= \frac{ख}{क} \cdot \frac{\left(य' - \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right)\left(य' + \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right)}{\left(य' + \sqrt{य'^{२} - क^{२}}\right)}$$

$$=\frac{ख}{क}\cdot\frac{क^2}{य' + \sqrt{य'^2 - क^2}} = \frac{क ख}{य' + \sqrt{य'^2 - क^2}}$$

आता, मप नेहमी > मश असल्यामुळे

म्हणजेच $य' > क$

$य'^2 - क^2$ धन आहे.

म्हणून $\sqrt{य'^2 - क^2}$ वास्तविक आहे.

म्हणून धन याम विचारांत घेतल्यास $य' + \sqrt{य'^2 - क^2}$ धन आहे व म्हणून बभ नेहमी धन असते.

म्हणून, ज्यांत याम धन असतात तो वक्राचा भाग पूर्णतः उपगा आणि अनुप्रस्थ अक्ष यांच्यामधे असतो.

शिवाय $य'$ जसाजसा वाढतो, म्हणजेच व बिंदूचें म या केंद्रापसूनचें अंतर जसेंजसें अधिक होत जातें तसातसा

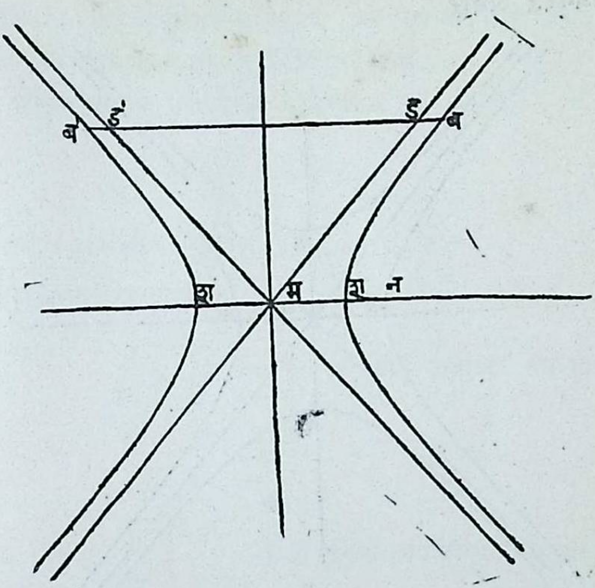
$य' + \sqrt{य'^2 - क^2}$ वाढत जातो. व

म्हणून $\frac{कख}{य' + \sqrt{य'^2 - क^2}}$ या भिन्नाची अर्हा कमी कमी होते. म्हणून $य'$ वाढतो तसतशी बभ सारखी कमी होते; आणि जेव्हा $य'$ अनंताइतका मोठा होतो तेव्हा बभ अत्यणु होते.

म्हणून उपगा अधींद्राच्या सतत निकट जात असते. पण त्याला वस्तुतः कधीच स्पर्श करीत नाही. केंद्रापासून अनंत अंतरावर वक्र आणि उपगा यांमधे कांहीच फरक आढळून येत नाही.

म्हणून अनंतावर वक्र आणि उपगा एकमेकांत विलीन होतात.

१२७.५. तसेंच, वक्रावरील ब बिंदूमधून अनुप्रस्थ अक्षाला बड ड'ब' रेषा समांतर काढून ती उपगांना ड व ड' मधे व वक्राला ब' मधे मिळत असल्यास,



आ. १००

बड . बड' $=$ क^2

हें सिद्ध करतां येईल.

१२७.६. आयत अर्धीद्राच्या उपगा

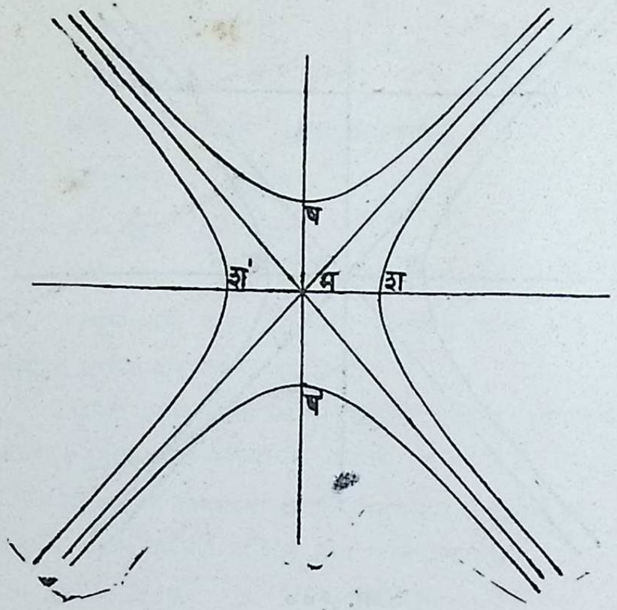
यांत क $=$ ख असल्यामुळ, उपगांचे समीकार

र $=$ $+$य आणि र $=$ $-$ य.

या समीकारांत 'ध' च्या अर्हा $\pm$ १ आहेत. ह्यावरून ह्या दोन उपगा य—अक्षाशीं $\pm$ ४५° कोण करतात. अर्थात् त्या एकमेकास लंब असतात.

या अर्धीद्राच्या उपगा परस्परांस लंब असल्यामुळे त्यांस 'आयत अर्धीद्र' म्हणतात.

१२८. अनुबद्ध अधींद्र



आ. १०१

समजा एका दिलेल्या अधींद्राचे अनुप्रस्थ व अनुबद्ध अक्ष अनुक्रमें शश' व षष' आहेत. तर ज्या अधींद्राचा अनुप्रस्थ अक्ष षष' व अनुबद्ध अक्ष शश' आहे त्या अधींद्राला मूळच्या (पहिल्या) अधींद्राचा अनुबद्ध अधींद्र म्हणतात.

१२८.१. $\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = १$ या अधींद्राच्या अनुबद्ध अधींद्राचा समीकार काढणें.

अनुबद्ध अधींद्रांत र—अक्ष अनुप्रस्थ अक्ष असून सामि अनुप्रस्थ अक्ष ख समान आहे.

य—अक्ष अनुबद्ध अक्ष असून सामि अनुबद्ध अक्ष क समान आहे.

म्हणून $\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = १$ या अधींद्राच्या अनुबद्ध अधींद्राचा

समीकार, या समीकारांत य, र ची एकमेकांत व क, ख ची एकमेकांत अदलाबदल करून मिळवितां यतो.

म्हणून अनुबद्ध अर्धीद्राचा समीकार

$$\frac{र^२}{ख^२} - \frac{य^२}{क^२} = १$$

१२८.२. अनुबद्ध अर्धीद्राच्या उपगा

१२७.१. अनुच्छेदांत दिल्याप्रमाणें

$$\frac{र^२}{ख^२} - \frac{य^२}{क^२} = १ \text{ च्या दोन उपगांचा समीकार}$$

$$\frac{र^२}{ख^२} - \frac{य^२}{क^२} = ० \qquad (१)$$

पण (१) हा $\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १$ या मूळच्या अर्धीद्राच्या उपगांचा समीकार आहे. (अनुच्छेद १२७.१ पहा.)

म्हणून अर्धीद्र व त्याचा अनुबद्ध यांच्या उपगा एकच असतात.

१२९. अर्धीद्र, त्याच्या उपगा आणि अनुबद्ध अर्धीद्र यांच्या समीकारांमधील संबंध.

अर्धीद्र, उपगा व अनुबद्ध अर्धीद्र यांचे समीकार अनुक्रमें

$$\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १ \qquad (१)$$

$$\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = ० \qquad (२)$$

$$\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = -१ \qquad (३)$$

आहेत.

आता समीकार (२) व समीकार (१) यांमधील फरक ज्या अवल राशीसमान आहे त्याच राशीसमान समीकार (३) व समीकार (२) यांमधील फरक आहे.

म्हणन अर्धींद्राच्या समीकाराचें रूप कसेंहि असलें तरी उपगांचा समीकार त्यापासून केवळ एका अचल राशीने भिन्न असतो. आणि अनुबद्ध अर्धींद्राचा समीकार उपगांच्या समीकारापासून त्याच अचल राशीने भिन्न असतो.

१३०. सोडविलेलीं उदाहरणें.

उदाहरण १ लें:— वक्रावरील कोणत्याहि बिंदूपासून उपगांवर काढलेल्या लंबांचा गुणाकार अचल असतो.

$$\frac{य^2}{क^2}-\frac{र^2}{ख^2}=१$$

या अर्धींद्रावर ब (त,थ) बिंदु आहे.

उपगांचे समीकार.

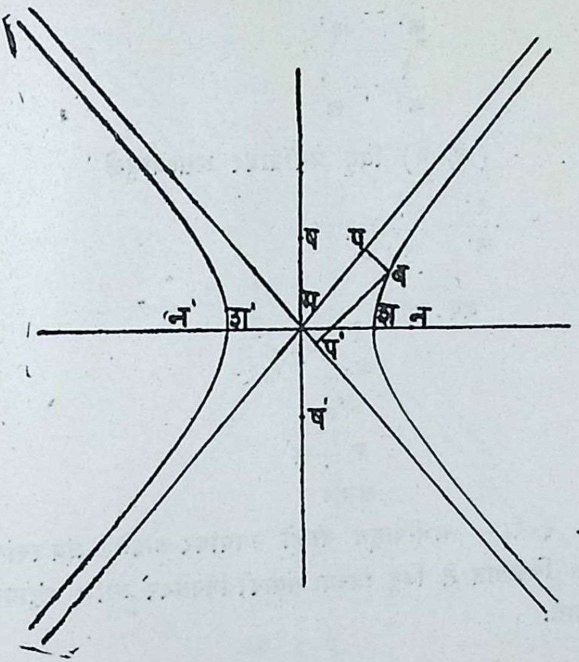
$$\frac{य}{क}-\frac{र}{ख}=१ \qquad (१)$$

व

$$\frac{य}{क}+\frac{र}{ख}=० \qquad (२)$$

(त, थ) पासून (१) व (२) वर काढलेले लंब बप व बप′ हे अनुक्रमें

$$\frac{\frac{त}{क}-\frac{थ}{ख}}{\sqrt{\frac{१}{क^2}+\frac{१}{ख^2}}}$$



आ. १०२

व $$\frac{\frac{त}{क}+\frac{थ}{ख}}{\sqrt{\frac{१}{क^२}+\frac{१}{ख^२}}}$$

हे आहेत.

$$\therefore \quad बप\,.\,बप' = \frac{\left(\frac{त}{क}-\frac{थ}{क}\right)\left(\frac{त}{क}+\frac{थ}{ख}\right)}{\sqrt{\frac{१}{क^२}+\frac{१}{ख^२}}\times\sqrt{\frac{१}{क^२}+\frac{१}{ख^२}}}$$

$$=\frac{\frac{त^2}{क^2}-\frac{थ^2}{ख^2}}{\frac{१}{क^2}+\frac{१}{ख^2}}$$

पण (त, थ) बिंदु अधींद्रावर असल्यामुळे

$$\frac{त^2}{क^2}-\frac{थ^2}{ख^2}=१$$

$$\therefore \quad बप \,.\, बप' = \frac{१}{\frac{१}{क^2}+\frac{१}{ख^2}}$$

$$=\frac{क^2 ख^2}{क^2+ख^2}$$

$$=अचल$$

उदा. २ रें:— नाभींपासून दोन्ही उपगांवर काढलेले लंब त्यांना ज्या बिंदूंत मिळतात ते बिंदू तिच्या संवादी नियतेवर आणि सहायवृत्तावर असतात.

मड या उपगेचा समीकार

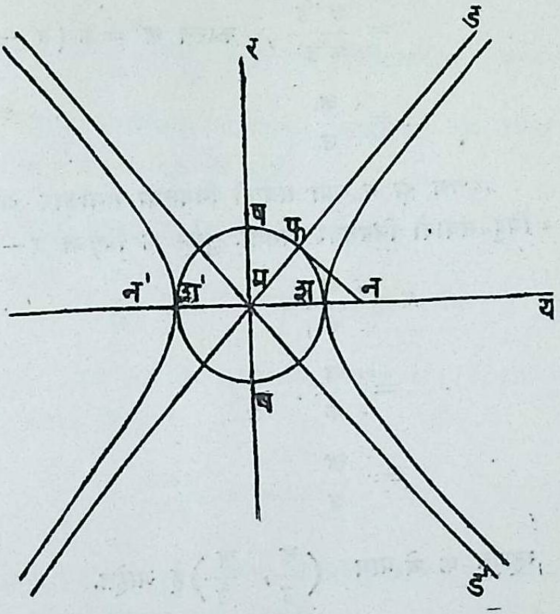
$$र=\frac{ख}{क}\,य$$

त्यावर न (कउ, ०) पासून नफ हा लंब काढा.
आता नफ रेषा

$$र=\frac{ख}{क}\,य$$

या रेषेला लंब असून ती न (कउ, ०) बिंदूंतून जाते.
म्हणून नफ रेषेचा समीकार

$$र=-\frac{क}{ख}\,(य-कउ)$$



आ. १०३

हो रेषा $र = \frac{ख}{क} य$ या उपगेला फ बिंदूंत मिळते. त्या बिंदूकरिता

$$\frac{ख}{क} य = -\frac{क}{ख} (य - कउ)$$

किंवा $य \left(\frac{ख}{क} + \frac{क}{ख} \right) = \frac{क^2 उ}{ख}.$

किंवा $\left(\frac{क^2 + ख^2}{कख} \right) = \frac{क^2 उ}{ख}$

किंवा $य = \frac{क^2 उ}{क^2 + ख^2}$

$$= \frac{क^3 उ}{क^2 उ^2}, \quad \text{कारण } ख^2 = क^2 (उ^2 - १)$$

$$= \frac{क}{उ}$$

पण हा न च्या संवादी नियतेचा समीकार आहे. म्हणून फ बिंदु संवादी नियतेवर असतो. पुन्हा फ बिंदूचा र–याम

$$र = \frac{ख}{क} . य$$

$$= \frac{ख}{क} . \frac{क}{उ}$$

$$= \frac{ख}{उ}$$

म्हणून फ चे याम $\left(\frac{क}{उ}, \frac{ख}{उ}\right)$ हे आहेत.

आता, $$\frac{क^2}{उ^2} + \frac{ख^2}{उ^2} = \frac{क^2 + ख^2}{उ^2}$$

$$= \frac{क^2 उ^2}{उ^2}$$

$$= क^2$$

म्हणून फ चे याम $य^2 + र^2 = क^2$ या सहायवृत्ताच्या समीकाराचें समीधान करतात.

म्हणून फ बिंदु सहायवृत्तावर असतो.

त्याचप्रमाणे न पासून दुसऱ्या उपगेवर काढलेल्या लंबाकरिता, तसेंच न' पासून दोन्ही उपगेवर काढलेल्या लंबाकरिता, हा गुणधर्म सिद्ध करतां येईल.

उदा. ३ रें :— $\frac{य^२}{क^२} - \frac{र^२}{ख^२} = १$ या अर्धोद्रावरील कोणत्याहि बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर केंद्रापासून काढलेला लंब तिला ड बिंदूत मिळतो; तर ड चा पथ काढा.

'ए' बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेचा समीकार

$$\frac{य}{क} - \frac{र}{ख} \text{ ज्या ए} = \text{कोज्याए} \qquad (१)$$

म्हणून (१) ला लंब असणाऱ्या आणि म (०, ०) मधून जाणाऱ्या रेषेचा समीकार

$$\frac{र}{क} + \frac{\text{ज्या ए}}{ख} य = ० \qquad (२)$$

आतां (१) व (२) यांच्या छेदनबिंदूचा पथ, या दोन समीकारांतून 'ए' चें निरसन करून मिळतो.

आता, समीकार (२) वरून

$$\text{ज्या ए} = -\frac{ख}{क} \cdot \frac{र}{य} \qquad (३$$

ज्या ए च्या या अर्हेचा समीकार (१) मधे आदेश करून

$$\text{कोज्या ए} = \frac{य}{क} - \frac{र}{ख}\left(-\frac{ख}{क} \cdot \frac{र}{य}\right)$$

$$= \frac{य}{क} + \frac{र^२}{कय}$$

$$= \frac{१}{क}\left(\frac{य^२ + र^२}{य}\right) \qquad (४)$$

(३) व (४) चा वर्ग योग करून

$$\text{ज्या}^2\text{ए} + \text{कोज्या}^2\text{ ए} \frac{\text{ख}^2\text{ र}^2}{\text{क}^2\text{ य}^2} + \frac{१}{\text{क}^2}\left[\frac{\text{य}^2+\text{र}^2}{\text{य र}}\right]^2$$

$$\text{किंवा } १ = \frac{\text{ख}^2\text{र}^2+(\text{य}^2+\text{र}^2)^2}{\text{क}^2\text{य}^2}$$

$$\text{किंवा } \text{क}^2\text{य}^2 = \text{ख}^2\text{र}^2 + (\text{य}^2+\text{र})^2$$

$$\text{किंवा } (\text{य}^2+\text{र}^2)^2 = \text{क}^2\text{य}^2 - \text{ख}^2\text{र}^2$$

हाच ड बिंदूचा इष्ट पथ होय.

उदाहरणसंग्रह १७

(१) अर्धोंद्रावरील ब या कोणत्याहि बिंदूच्या कोटीचा पाद प असून ब शीं असलेला अभिलंब अनुप्रस्थ अक्षाला ज बिंदूंत मिळत असल्यास मज$=$उ$^2-$मप हें दाखवा. आणि बज व ब शीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर केंद्रापासून काढलेला लंब यांचे गुणनफल अचल आहे हें सिद्ध करा. (नागपुर १९४४)

(२) $\frac{\text{य}^2}{\text{क}^2} - \frac{\text{र}^2}{\text{ख}^2}$ या अर्धोंद्राला (त,थ) बिंदूपासून काढलेल्या स्पर्शरेषा य$-$अक्षाशीं ऊ आणि ऊ$'$ हे कोण करीत असल्यास

$$\text{स्प ऊ} + \text{स्प ऊ}' = \frac{२\text{तय}}{\text{त}^2-\text{क}^2}$$

हें सिद्ध करा. (नागपुर १९३८)

(३) एका अर्धोंद्राच्या न, न$'$ या नाभी आणि म हें केंद्र आहे. ब हा अर्धोंद्रावरील कोणताहि बिंदु आहे. तर नब.न$'$ब$=$मब^2 ह सिद्ध करा.

(४) एक अधींद्र आणि त्याचा अनुबद्ध यांच्या उत्केंद्रता उ, उ$'$, असल्यास $\frac{१}{उ^{२}} + \frac{१}{उ'^{२}} = १$ हें दाखवा. (नागपुर १९४०)

(५) एका अधींद्राच्या ज्या जीवा त्याच्या अनुबद्ध अधींद्राला स्पर्श करितात त्या जीवा स्पर्शबिंदूशीं दुभागल्या जातात हें सिद्ध करा. (कलकत्ता १९२५)

(६) एका अधींद्राच्या उपगांमधील कोण ६०° असल्यास अधींद्राची उत्केंद्रता काढा. (नागपुर १९२५)

(७) एका दिलेल्या बिंदूचे, एक दिलेला अधींद्र व त्याचा अनुबद्ध यांना अनुलक्षून असलेले ध्रुवीय समांतर असून केंद्रापासून समदूर असतात हें सिद्ध करा. (नागपुर १९२७)

(८) मूलबिंदूतून जाणाऱ्या आणि
२य + ३र – ५ = ० व ६य – ४र + ३ = ० या रेषा उपगा असणाऱ्या अधींद्राचा समीकार काढा. अधींद्राची उत्केंद्रता किती आहे ? (मद्रास १९४०)

(९) $\frac{य^{२}}{क^{२}} - \frac{र^{२}}{ख^{२}} = १$ या अधींद्राचा अभिलंब अक्षांना ज आणि झ बिंदूंत मिळतो; आणि जब, झब रेषा अक्षांना लंब काढल्या; तर ब चा पथ $क^{२}य^{२} - ख^{२} = (क^{२} + ख^{२})^{२}$ आहे हें दाखवा.

(१०) $य^{२} - र^{२} = क^{२}$ या अधींद्राच्या स्पर्शरेषांचे $र^{२} = ४कय$ या एकेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या ध्रुवांचा पथ $४य^{२} + र^{२} = ४क^{२}$ हें ऊनेंद्र आहे हें सिद्ध करा.

(११) $\frac{य^{२}}{क^{२}} - \frac{र^{२}}{ख^{२}} = १$ या अधींद्राच्या न आणि न$'$ नाभींना जोडणारी रेषा व्यास धरून वृत्त काढलें. तर वृत्ताच्या कोणत्याहि

स्पर्शरेषेच्या अधींद्राला अनुलक्षून असलेल्या ध्रुवाचा पथ

$$\frac{य^{२}}{क^{४}}+\frac{र^{२}}{ख^{४}}=\frac{१}{क^{२}+ख^{२}}$$ हे उनेंद्र आहे हें सिद्ध करा.

(१२) $य^{२}+र^{२}=क^{२}$ या वृत्तावरील कोणत्याहि बिंदूपासून $य^{२}-र^{२}=क^{२}$ या अधींद्राला स्पर्शरेषा काढल्या; तर स्पर्शजीवांच्या मध्यबिंदूंचा पथ

$$(य^{२}-र^{२})^{२}=क^{२}(य^{२}+र^{२})$$

हा वक्र आहे हें सिद्ध करा.

(१३) अधींद्राच्या स्पर्शरेषेचा त्याच्या उपगांमधें खंडित झालेला भाग स्पर्शबिंदूशीं दुभागला जातो, आणि ही स्पर्शरेषा व उपगा यांनी निर्माण झालेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ कख समान अचल आहे हें सिद्ध करा.

(१४) $\frac{य^{२}}{क^{२}}-\frac{र^{२}}{ख^{२}}=१$ या अधींद्राचें म हें केंद्र आहे. ब या कोणत्याहि बिंदूशीं असलेली स्पर्शरेषा उपगांना प आणि फ बिंदूंत मिळत असल्यास मपफ त्रिकोणाच्या परिवृत्ताच्या केंद्राचा पथ $४(क^{२}य^{२}-ख^{२}र^{२})=(क^{२}+ख^{२})$ आहे हे सिद्ध करा.

उदाहरणसंग्रह १८

संकीर्ण प्रश्न

(१) एका ऊनेंद्रांत अंतर्लिखित केलेल्या तीन शिरोबिंदूंचे उत्केंद्र कोण $ए_{१}$, $ए_{२}$, $ए_{३}$ असल्यास त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ

$$\frac{१}{२}\,कख\begin{vmatrix} कोज्या\ ए_{१} & ज्या\ ए_{१} & १ \\ कोज्या\ ए_{२} & ज्या\ ए_{२} & १ \\ कोज्या\ ए_{३} & ज्या\ ए_{३} & १ \end{vmatrix}$$

$= २$ कख ज्या $\frac{ए_२ - ए_३}{२}$ ज्या $\frac{ए_३ - ए_१}{२}$ ज्या $\frac{ए_१ - ए_२}{२}$
आहे हें सिद्ध करा.

(२) $\frac{य^२}{क^२} + \frac{र^२}{ख^२} = १$ या ऊनेंद्रावरील $ए_१$, $ए_२$, $ए_३$ बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषांनी तयार झालेल्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ

कख स्प $\frac{ए_२ - ए_३}{२}$ स्प $\frac{ए_३ - ए_१}{२}$ स्प $\frac{ए_१ - ए_२}{२}$

आहे हें दाखवा.

(३) ऊनेंद्रावरील दोन बिंदूंच्या उत्केंद्रकोणांमधील फरक अचल असल्यास त्या बिंदूंना जोडणारी जीवा एका स्थिर संकेंद्र ऊनेंद्राला स्पर्श करते; आणि तिचा स्पर्शबिंदु, केंद्र आणि जीवेला समांतर असलेल्या मूळच्या ऊनेंद्राच्या स्पर्शरेषेचा स्पर्श बिंदु यांना जोडणाऱ्या रेषेवर असतो हें सिद्ध करा.

(४) एका ऊनेंद्राच्या नाभीजीवेच्या टोकांचे उत्केंद्रकोण ए आणि ए′ असल्यास

$$स्प \frac{ए}{२} स्प \frac{ए'}{२} = -\frac{१-उ}{१+उ} \text{ किंवा } -\frac{१+उ}{१-उ}$$

हें सिद्ध करा. दोन प्रकारांतील भेद दाखवा.

(५) एका ऊनेंद्रावर ब आणि ब′ हे स्थिर बिंदु असून भ हा त्यावरील चल बिंदु आहे. बभ आणि ब′भ हे बिंदू नियतेला च आणि च′ बिंदूंत छेदतात. तर चच′ तिच्या संवादी नाभीशीं एक अचल कोण आयातित करते हें सिद्ध करा.

(६) बनभ आणि बन′भ′ या एका ऊनेंद्राच्या नाभीजीवा असल्यास भ आणि भ′ बिंदूंशीं असलेल्या स्पर्शरेषा ब शीं असलेल्या अभिलंबावर छेदतात हे दाखवा.

(७) एका ऊनेंद्राच्या सहायवृत्ताच्यावरील ब बिंदूशीं काढलेली स्पर्शरेषा शश′ या प्रधान अक्षाला स बिंदूंत मिळते आणि बश व बश′ या रेषा ऊनेंद्राला अनुक्रमें प आणि फ बिंदूत मिळतात. तर स, प, फ संरेख आहेत हें दाखवा.

(८) न आणि न′ या नाभींपासून उनेंद्राकड नब आणि न′ब′ या समांतर रेषा काढल्या. ब आणि ब′ शीं असलेल्या स्पर्शरेषा स बिंदूंत आणि नब′ व न′ब भ बिंदूंत मिळतात. तर सिद्ध करा कीं स सहायवृत्तावर असून सभ बभब′ कोण दुभागते आणि

सभ चा भब किंवा भब′ वरील विक्षेप

$$= \frac{१}{४} \text{ सामिउत्थान}$$

(९) प्रत्येक नाभि, ब या कोणत्याहि बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषेवर दुसऱ्या नाभीपासून काढलेल्या लंबाचा पाद जोडणाऱ्या रेषा बज या अभिलंबावर मिळतात व बज ला दुभागतात हें सिद्ध करा.

(१०) ऊनेंद्राच्या सहायवृत्ताच्या कोणत्याहि स्पर्शरेषेच्या ऊनेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या ध्रुवाचा पथ

$$\frac{य^२}{क^४} + \frac{र^२}{ख^४} = \frac{१}{क^२}$$

आहे हें सिद्ध करा.

(११) एक बिंदु अशा प्रतिबंधान फिरतो की त्याच्या एका ऊनेंद्राला अनुलक्षून असलेल्या ध्रुवीयावर केंद्रापासून काढलेला लंब ग समान अचल आहे; तर त्या बिंदूचा पथ

$$\frac{य^२}{क^४} + \frac{र^२}{ख^४} = \frac{१}{ग^२}$$

हें दाखवा.

(१२) ऊनेंद्रावरील ब बिंदूशीं असलेला अभिलंब प्रधान व गौण अक्षांना अनुक्रमे ज आणि झ बिंदूंत मिळतो; तर सिद्ध करा की

(१) बज . बझ = नब . न′ब

(२) ब शीं असलेली स्पर्शरेषा प्रधान अक्षाला स बिंदूंत मिळत असल्यास

$$\text{मज} . \text{मस} = \text{मन}^2$$

(३) बज आणि जझ यांच्या मध्यबिंदूचे पथ अनुक्रमें

$$\frac{४\,\text{य}^2}{\text{क}^2 (१+\text{उ}^2)^2} + \frac{४\text{र}^2}{\text{ख}^2} = १ \text{ आणि}$$

$$\text{क}^2\,\text{य}^2 + \text{ख}^2\,\text{र}^2 = \frac{(\text{क}-\text{ख})^2}{२} \times \frac{(\text{क}+\text{ख})^2}{२}$$

आहेत.

(१३) $\frac{\text{य}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{ख}^2} = १$ या ऊनेंद्रावरील 'ए' उत्केंद्रकोण असणाऱ्या बिंदूशीं असलेल्या अभिलंबावर केंद्रापासून काढलेल्या लंबाची लांबी ल असेल तर

$$\text{ल}^2 = (\text{क}-\text{ख})^2 \left\{ १ - \frac{(\text{क ज्या}^2\,\text{ए} - \text{ख कोज्या}^2\,\text{ए}^2)}{(\text{क}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ए} + \text{ख}^2\,\text{कोज्या}^2\,\text{ए})} \right\}$$

हें सिद्ध करा.

$\text{स्प}^2\,\text{ए} = \frac{\text{ख}}{\text{क}}$ असेल तर ल ची महत्तम अर्हा (क−ख) आहे हें दाखवा.

(१४) एखाद्या अधींद्राची किंवा ऊनेंद्राचीं कोणतोहि जीवा नाभीशीं जो कोण आपातित करते तो कोण, ती नाभि आणि जीवेचा ध्रुव यांना जोडणाऱ्या रेषेने दुभागला जातो हें सिद्ध करा.

(१५) एखाद्या अर्धींद्रावर किंवा ऊनेंद्रावर ब आणि ब' हे कोणतेहि दोन बिंदू असून न, न' त्याच्या नाभी आहेत; तर नब, नब' न'ब, न'ब' या नाभोरेषा, बब' जीवेचा ध्रुव केंद्र असणाऱ्या वृत्ताला स्पर्श करतात सिद्ध करा.

(१६) $\frac{य^2}{क^2} - \frac{र^2}{ख^2} = १$ या अर्धींद्रावरील कोणत्याहि बिंदूचे याम, 'ए' या प्राचलाच्या साह्याने, (क व्युत्कोज्या ए, ख स्प ए) अशा रीतीने व्यक्त केल्यास, वक्रावरील ज्या दोन बिंदूच्या प्राचलांचा योग दिलेल्या राशोसमान अचल आहे त्या बिंदूयुग्मांना जोडणाऱ्या सर्व रेषा एकाच बिंदूतून जातात हें सिद्ध करा.

(१७) य=क कोज्या ए, र=ख ज्या ए हें ऊनेंद्र आणि य=क व्युत्कोज्या ए, र=ख स्प ए हें अर्धीन्द्र यावरील एकच प्राचल असणारे बिंदू जोडणाऱ्या रेषा एका स्थिर बिंदूतून जातात हें सिद्ध करा. शिवाय त्या बिंदूशीं असलेल्या स्पर्शरेषा एका स्थिर रेषेवर छेदतात हें सिद्ध करा.

उत्तरें

उदाहरणसंग्रह १

(१) $\frac{य_१+य_२+य_३}{३}, \quad \frac{र_१+र_२+र_३}{३}$

(७) $\left(\frac{३}{२}, \frac{३\sqrt{३}}{२}\right), \left(-\sqrt{२}, \sqrt{२},\right) \quad (१, १)$

(८) $\left(५, स्प^{-१}\frac{४}{३}\right), \left(२, \frac{प्या}{३}\right), \left(१३, -स्प^{-१}\frac{१२}{५}\right)$

(९) $(-३, ६)$.

उदाहरणसंग्रह २

(१) $य=गर$

(२) $य=\frac{ग^२}{४य_१}$

(३) $१५\ (य^२+र^२)\ -२८य-७०र+६७=०$

(४) $[(१-क^२)(य^२+र^२)-२(य_१-य_२क^२)य-२(र_१-क^२र_२)र$
$+(य_१^२-क^२य_२^२)+(र_१^२-क^२र_२^२)]=०$

(५) $२(य^२+र^२)-२(य_१+य_२)\ य-२(र_१+र_२)र+य_१^२+य_२^२$
$+र_१^२+र_२^२-त^२=०$

(६) $य^२+र^२=२५$

(८) $र=४य$

उदाहरणसंग्रह ३

(१) $२यर - र_१य - य_१र = ०$

(२) $३य - ६र = २यर$

(३) $१२\frac{१}{२}$ चौरस एकक;

$य + ११र + २९ = ०;$

$\sqrt{\frac{२५}{१२२}}.$

(४) $अ = स्प^{-१}\frac{४}{३}$ असल्यास

$य$ कोज्या $अ + र$ ज्या $अ = \frac{२}{५}$,

$\frac{य}{१}$ कोज्या $अ + र$ ज्या $अ = \frac{७}{५}$;

(५) $र = २य$; $र - य - २ = ०$; $७य + र + १७ = ०$

उदाहरणसंग्रह ४

(१) (१) ४५° (२) $-स्प^{-१}\frac{१}{७}$ (३) $-स्प^{-१}\frac{१७}{६}$ (४) १३५.

५) $स्प^{-१}\frac{७}{१७}$ (६) ३०° (७) ३०° (८) ३०° (९) ४५°

(२) (१) $\left(-\frac{११}{२९}, \frac{४१}{२९}\right)$ (२) $\left(\frac{कख}{क+ख}, \frac{कख}{क+ख}\right)$

(३) $\left(\text{क कोज्या } \frac{\text{ए}_1 + \text{ए}_2}{२} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{\text{ए}_1 - \text{ए}_2}{२},\right.$

$\left.\text{कोज्या } \frac{\text{ए}_1 + \text{ए}_2}{२} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{\text{ए}_1 - \text{ए}_2}{२}\right).$

(३) (१) य+७र=१ (२) ४३ य—२९र=७१ (३) ३य=र

(४) $\text{क}^2\text{र} - \text{ख}^2\text{य} = \text{कख}(\text{क} - \text{ख})$ (५) ४य−३र+७=०

(६) ७य+६र=८५ (७) २य+५र=०

(८) ५य+१३र−४८=० (९) २३य+२३र=११

(१०) ३य+४र=१७ किंवा र=२

(४) ३य+४र=२५, ४य−३र=२५.

(५) ४य+३र=५; $\frac{१३}{५}$

(६) य+३र=१४; ३य—र=१२; १५ वर्ग एककें.

(७) (१) ५य−र=१५ (२) य+२र=५ (३) य+३र=१२

(४) २य+३र=१८ (५) ७य−४र=१४$\sqrt{-१}$

(६) ४य+३र+४०=०

(१०) $\left(-\frac{१५}{४}, -\frac{१५}{४}\right)$

(१२) य=क, र=क+ग, य=−क, र=क−ग

(१३) (अ) $\overline{\text{स्प}}^{\,1}\left(\frac{\text{खत} - \text{कथ}}{\text{कत} + \text{खथ}}\right)$; (आ) $\text{र} = \frac{\text{ध} \pm \text{स्पअ}}{१ \mp \text{धस्पअ}}$ य.

(१४) (१) य+२र= किंवा २य− र =१

(२) र=−२ किंवा $\sqrt{३}$य—र=२+३ $\sqrt{३}$

(१५) क $= -\frac{२}{३}$ किंवा ६.

(१६) ५; ३; ८.

(१७) २, २, १

(२०) —क कोज्या $\left(\frac{अ - आ}{२}\right)$

(२१) $\frac{क - ख}{\sqrt{१ + घ^{२}}}$.

(२४) (१) ४य + २२र − १० = ० (२) १८य − ६र − ७ = ०
४४य − ८र − ३० = ०. १२य + ३६र − १३ = ०

(३) ३य + र − २ = ० (४) ३३य + ९र + ९ = ०
य − ३र − ८ = ०. ३य − ११र − ११ = ०

(२५) ६य − ३र − १३ = ०

उदाहरणसंग्रह ५

(१) $५र^{२} - ५य^{२} + २४यर + ५२य - २६०र = ०$

(२) (१) ९०°, $\left(-\frac{३}{२}, -\frac{५}{२}\right)$

(२) $स्प^{-१}\frac{१}{३}$, (२,३)

(३) ९०°, $\left(\frac{३}{२}, \frac{१}{२}\right)$

(४) $स्प^{-१}\frac{२३}{२}$, $\left(\frac{-२५}{२३}, \frac{+४३}{२३}\right)$

(५) ९०°, (०,०)

(४) (१) $\sqrt{\frac{१०}{२९}}$ (२) ५ $\sqrt{२क}$ (३) $\sqrt{\frac{५}{१३}}$

(४) $\sqrt{\frac{२}{५}}$

(५) (१) $-\frac{५}{४}$ किंवा $-\frac{५}{३}$ (२) $\frac{६}{७}$ (३) $\frac{१५}{२}$

(४) −१२ (५) −३.

(११) $(ग^2 - क^2 ध^2)\ य^2 + २क^2 धयर + (ग^2 - क^2)\ र^2 = ०$

(१३) $द^2 (क + ख) + २द\ (छत + चथ) + ग(त^2 + थ^2) = ०$

(१४) (१) र = ०, र = य; ४५°.

(२) $-७य^2 + २यर + र^2 = ०$; स्प$^{-1}$ $\frac{२\sqrt{२}}{३}$

(३) ३य + र = ०, य − ३र = ०; ९०°.

(४) $-५य^2 + ११यर + ५र^2 = ०$; ९०°.

(५) $३य^2 + ७यर + २र^2 = ०$; ४५°.

(६) $९य^2 + १०यर - ९र^2 = ०$; ९०°.

उदाहरणसंग्रह ६ संकीर्ण प्रश्न

(१) (१) (−४, −९) (२) (६, २)

(२) $\left(\frac{-२}{३}, \frac{४}{३}\right)$

(३) $\left(-५\frac{१}{७}, -६\frac{३}{७}\right)$

(४) (२, ३)

(५) प्र $\left(\frac{४}{३}, \frac{१४}{३}\right)$, प $\left(\frac{१}{२}, ४\right)$, ल (३, ६),

४य − ५र + १८ = ०

(६) (२, २), (९, ३), (५, ८); ११य + र − ६३ = ०

७य − १०र + ६ = ०, ४य + ११र − ६९ = ०.

(७) य + ३र − ४ = ०

(९) $२\sqrt{२}$, $\sqrt{१०}$, $२\sqrt{१०}$.

(१४) $२क^{२}$

(१८) $\frac{१}{२\sqrt{३}}$

(२१) ख (५क − ४ख) $य^{२}$ − १३कखयर + क (५ख − ४क) $र^{२}$ = ०

(२२) $६य^{२} + ५यर - ६र^{२} = ०$

उदाहरणसंग्रह ७

(१) (१) $य^{२} + र^{२} - २य - ४र - ४ = ०$

(२) $य^{२} + र^{२} + ६य + ८र - ७५ = ०$

(३) $य^{२} + र^{२} - २कय + २खर - २कख = ०$

(२) (१) (२, ४), $\sqrt{६१}$

(२) $\left(\frac{१}{२}\ \frac{१}{२}\right)$, $\frac{१}{\sqrt{२}}$

(३) (क, ०), क

(४) $\left(०, \frac{७}{६}\right)$, $\frac{७}{६}$

(५) $\left(\frac{-२}{३}, \frac{२}{३}\right) \frac{\sqrt{११}}{३}.$

(३) (१) $य^२+र^२+१०य+२०र+२५=०$

$य^२+र^२-६य+४र+९=०$

(२) $य^२+र^२-२य+४र+१=०$

$य^२+र^२-१८य+२०र+८१=०$

(३) $१६य^२+१६र^२-१६कय+(४०-८क)र$

$+(५-क)^२=०$

(४) $य^२+र^२-१०य-८र+१६=०$

(५) $य^२+र^२-८य-६र+२१=०$

(६) $य^२+र^२+२य-र=०$

(७) $य^२+र^२-३य-२-४=०$

(५) (१, ८)

(६) $१४४य^२+१४४र^२-१२०य-१२०र+२५=०$

(१०) $(२, २\sqrt{३})$, $र-\sqrt{३}य \pm ८=०$

(११) $२र-य=५\sqrt{५}$, $र+२य=५\sqrt{५}$.

(१२) $२\sqrt{२}$

(१४) $(ऋ-१)^२य^२-२(२ऋ-१)यर+(ऋ-१)^२र^२=०$;

$ऋ=०$, $२+\sqrt{२}$, $२-\sqrt{२}$.

$३य+४र=०$

(१६) $४(र^२-य^२)=न^२$

उदाहरणसंग्रह ८

(१) $य+२र=क^२, -२य+४र=क^२, ३य+२र=क^२,$
$५य-४र=क^२$

(२) $य^२+र^२-६य-४र=०, २\sqrt{१३}.$

(३) $(-२५, ५०)$

(४) $३०य^२+३०र^२+१६२य-२१६र+११३=०$; वृत्त.

(५) $र^२=४कय$

(६) $\frac{१०}{३}; \left(-\frac{११}{३}, ०\right)$

(८) $(१, -२); \frac{१}{२}; \frac{\sqrt{१९}}{२}.$

(९) $\left(\frac{५}{६}, \frac{३}{५}\right)$

(१०) $\left(६, -\frac{१८}{५}\right)$

(१२) $य^२+र^२=२क^२$

(१३) (१) $\left(\frac{६}{५}, \frac{८}{५}\right)$, (२) $\left(-\frac{१७}{५}, \frac{११}{५}\right)$

(१४) $\frac{२कख}{\sqrt{क^२+ख^२}}$

(१५) $स्प^{-१}\frac{४}{३}$

उदाहरणसंग्रह ९

(१) (१) $र^2 = ५य + १०$

(२) $३य^2 + १२य - ८र = ०$

(३) $१६य^2 - २४यर + ९र^2 - ४४य - ४२र + ४९ = ०$

(४) $(कय - खर)^2 = २क^3य + २ख^3र - (क^४ + ख^४ + क^2ख^2)$

(४) आंत

(५) $\left(-\frac{७}{२}, \frac{५}{२}\right)$ $र = \frac{५}{२}, \left(-\frac{१७}{४}, \frac{५}{२}\right)$, ३.

(७) (०,०), (३, २)

उदाहरणसंग्रह १०

(१) $तद = कध^2$

(२) $र = २य + १$

(४) $३य + ९र - ३८ = ०$

(५) $ध = \pm १$, $ग = \pm क$

(६) $\sqrt{२}$, $५\sqrt{२}$

(८) $य = ०$

(११) $४य^2 - र^2 = ४क^2$

(१२) $\left(\frac{क}{ध_१ध_२}, \frac{क(ध_१ + ध_२)}{ध_१ध_२}\right)$, $ध_१ध_२ = १$

उदाहरणसंग्रह ११

(४) $य(य - त)^2 + र(य - त)(र - थ) + क(र - थ)^2 = ०$

(११) $र^२ = \frac{४ख^२}{क} य$

(१३) $४य + ३र + १ = ०$

उदाहरणसंग्रह १२

(३) $कध^३ + २कध + ग + धइ - ई = ०,\ य + र = ११$

(४) $र^२ - ४कय = ४क^२$

(५) $र^२ + कय + ३क^२ = ०$

उदाहरणसंग्रह १३

(१) (१) $\frac{\sqrt{५}}{३},\ (०, \pm\sqrt{५}),\ \frac{४}{३}$

(२) $\frac{\sqrt{५}}{३},\ (\pm\sqrt{५}, ०),\ \frac{४}{३}$

(२) $\frac{(य + कउ)^२}{क^२} + \frac{र^२}{ख^२} = १$

(३) $(र \pm ४\sqrt{२}) = ०,\ (०, \pm\sqrt{२}), (०, \pm २\sqrt{२})$

(६) आंत; आंत; वर; बाहेर.

उदाहरणसंग्रह १४

(१) $(३, २\sqrt{३}),\ (-१, \frac{२}{\sqrt{३}})$

(२) $४य^२ + ९र^२ - ४य = ०$

(६) ४, −३.

(७) $य^२ + र^२ = ५$; (२, १), (−२, १), (२, −१), (−२, −१)

(८) $य + २र − ४ = ०$

उदाहरणसंग्रह १५

(१) $\frac{य^२}{क^४} + \frac{र^२}{ख^४} = \frac{१}{क^२} + \frac{१}{ख^२}$.

(२) $\frac{य^२}{क^४} + \frac{र^२}{ख^४} = \frac{१}{त^२}$

उदाहरणसंग्रह १६

(१) (१) $\sqrt{५}$, $४\sqrt{५}$, ८.

(२) $\frac{\sqrt{१३}}{२}$, $२\sqrt{१३}$, $४\frac{१}{२}$

(३) $\frac{\sqrt{१३}}{३}$, $२\sqrt{१३}$, $१\frac{१}{३}$

(५) $\frac{य^२}{९} - \frac{र^२}{५५} = \frac{१}{४}$

उदाहरणसंग्रह १७

६) २ किंवा $\frac{२}{\sqrt{३}}$

(८) $\sqrt{२}$

परिभाषिक शब्दावलि

भारतीय आंग्ल

अंश numerator
अग्र extremity
अचल constant
अधःस्पर्शरेखा subtangent
अधिक कोण obtuse angle
अधीन्द्र hyperbola
अधोलम्ब subnormal
अनन्त infinite
अनन्ते स्पर्शी asymptote
अनियत indefinite
अनियतरूपेण indefinitely
अनुपाती proportional
अनुप्रस्थ अक्ष transverse axis
अनुबद्ध अक्ष conjugate axis
अन्तःखण्ड intercept
अन्तर्गत included
अन्तर्द्विभाजक internal bisector
अभिनत inclined
अभिलम्ब normal
अभिव्यक्ति expression
अर्हा value
अर्हायुग्म pair of values
आदि रेखा initial line
आदेश substitution
आन्तरार्धक internal bisector
उत्केन्द्र eccentric
उत्केंद्रता eccentricity
उत्थान latus rectum
उपगा asymptote
ऊनेन्द्र ellipse
ऋण negative
एकेंद्र parabola
ऐकात्म्यतः identically
करणी चिन्ह radical sign
काल्पनिक imaginary
केंद्र centre
कोटि ordinate
खण्ड factor
गतिशील moving
गुण property
गोलाभिवार paranthesis
गौण अक्ष minor axis
घटीवत् clockwise,
घात degree
चतुःसमभुज rhombus
चरण quadrant

जीवा chord
ज्ञात known
तिर्यग् oblique
त्रिज्या radius
द्विगुणकोटि double ordinate
द्विघातन squaring
द्विघातसमीकार quadratic equation
धन positive
धावी current
ध्रुव pole
ध्रुवीय polar
नति inclination
नाभि focus
नाभिरेखा focal line
नाभ्यन्तर focal distance
निकोण acute angle
निधि locus
नियत वृत्त director circle
नियता directrix
निरसन elimination
निरास फल eliminant
निरूपण represent
निर्वचन interpret
निश्चायक determinant
निष्पत्ति ratio
न्यूनकोण acute angle
पथ locus
पदसंहति expression
पदांत in terms of
पद्धति system
परिभाषा definition
परिमित finite
प्रकेंद्र centroid
प्रक्रम stage
प्रतिघटि anticlockwise
प्रतिघटीवत् anticlockwise
प्रतिबन्ध condition
प्रधान अक्ष major axis
प्रमाप standard
प्रयोग application
प्रवणक gradient
प्रह्रसन reduction
प्रह्रास reduction
प्राचल parameter
प्रास dash
फल result
बीजीय algebraic
भिन्न distinct
भुज obscissa
महत्ता magnitude
मान, अर्हा value

मुख्य principal
मूलबिंदु origin
मूलाक्ष radical axis
यांत्रिकीय mechanical
याम coordinate
यामरैखिकी coordinate geometry
यामाक्ष axes of coordinates
युगपत् simultaneously
युग्म pair
योग sum
रूढि convention
रूपांतरित transformed
रेखीय linear
रैखिकी geometry
लम्बकोण विक्षेप orthogonal projection
लम्बता perpendicularity
वक्र curve
वज्रगुणन cross-multiplication
वज्राभ्यासcross-multiplication
वर्ग square
वास्तविक real
विक्षेप projection
विक्षेपण project
विलोमक्रमेण conversely
विवेचक discriminant
विश्लेषण analysis
वृत्त circle
व्यंजक expression
शंकुच्छेद section of a conic
शांकव conic, conic section.
शिरोबिन्दु vertex
संरेख collinear
संरेखता collinearity
संलग्न adjacent
संवादी corresponding
संवृत्त closed
संस्पर्शजीवा chord of contact
संगामी concurrent
सदिश कोण vectorial angle
सदिश त्रिज्या radius vector
संपाती coincident
सम्बन्ध relation
संमितीय symmetrical
समघात homogeneons
समता equality
समदूर equidistant
समांतर parallel
समान्तरता parallelism
समीकार equation
सर्वांगसम congruent

सहायवृत्त auxiliary circle
साद्यंत throughout
सापेक्षता relativity
सामान्यतम most general
सामि अनुप्रस्थ अक्ष semitransverse axis
सामिअनुबद्ध अक्ष semiconjugate axis
सामिउत्थान semilatus rectus
सामिगौण अक्ष semiminor axis
सामिप्रधान अक्ष semimajor axis
सारणी table
सूत्र formula
स्थिर fixed
स्थिरांक constant
स्पर्शरेखा tangent
स्वेच्छ arbitrary

आंग्ल भारतीय

abscissa भुज
acute angle न्यूनकोण, निकोण
adjacent संलग्न
algebraic बीजीय
analysis विश्लेषण
anticlockwise प्रतिघटीवत्
application प्रयोग
arbitrary स्वेच्छ
asymptote अनन्तेस्पर्शी, उपगा
auxiliary circle सहायवृत्त
axes of coordinates यामाक्ष
centre केंद्र
centroid प्रकेंद्र
chord जीवा
chord of contact संस्पर्शजीवा
circle वृत्त
clockwise घटीवत्
closed संवृत्त
coincident संपाती
collinear संरेख
collinearity संरेखता
conic शांकव
conic section शांकव
concurrent संगामी
condition प्रतिबंध
congruent सर्वांगसम
conjugate axis अनुबद्ध अक्ष
constant अचल
constant स्थिरांक
convention रूढि
conversely विलोमक्रमेण
coordinate याम
coordinate geometry याम रैखिकी
corresponding संवादी
cross multiplication वज्र-गुणन, वज्राभ्यास
current coordinates धावी याम
curve वक्र
dash प्रास
definition परिभाषा
degree घात
determinant निश्चायक
directrix नियता
director circle नियत वृत्त
discriminant विवेचक
distinct भिन्न

double ordinate द्विगुणकोटि
eccentric उत्केंद्र
eccentricity उत्केंद्रता
ellipse ऊनेंद्र
eliminant निरासफल
elimination निरसन
equidistant समदूर
equality समता
equation समीकार
expression अभिव्यक्ति, व्यंजक पदसंहति
extremity अग्र
factor खंड
finite परिमित
fixed स्थिर
focal distance नाभ्यन्तर
focal line नाभिरेखा
focus नाभि
formula सूत्र
geometry रैखिकी
gradient प्रवणक
homogeneous समघात
hyperbola अधींद्र
identically ऐकात्मतः
imaginary काल्पनिक
inclined अभिनत
inclination नति
included अंतर्गत
indefinite अनियत
indefinitely अनियतरूपेण
infinite अनंत
initial line आदिरेखा
intercept अंतःखण्ड
in terms of पदांत
internal bisector अंतरार्धक, अंतर्द्विभाजक
interpret निर्वचन
known ज्ञात
latus rectum उत्थान
linear रेखीय
locus पथ, निधि
major axis प्रधान अक्ष
magnitude महत्ता
mechanical यांत्रिकीय
minor axis गौण अक्ष
most general सामान्यतम
moving गतिशील
negative ऋण
normal अभिलंब
numerator अंश
oblique तिर्यग्
obtuse angle अधिकक्रोण

ordinate कोटि
origin मूलबिंदु
orthogonal projection
 लंबकोणविक्षेप
pair युग्म
pair of values अर्हायुग्म
parabola एकेंद्र
parallal समांतर
parallelism समांतरता
parameter प्राचल
paranthesis गोलाभिवार
perpendicularity लंबता
pole ध्रुव
polar ध्रुवीय
positive धन
project विक्षेपण
projection विक्षेप
principal मुख्य
property गुण
proportional अनुपाती
quadrant चरण
quadratic equation द्विघात
 समीकार
radical axis मूलाक्ष
radical sign करणी चिन्ह
radius त्रिज्या
radius vector सदिश त्रिज्या
ratio निष्पत्ति
real वास्तविक
reduction प्र-हसन, प्र-हास
relation संबन्ध
relativity सापेक्षता
represent निरूपण
result फल
rhombus चतुःसमभुज
section of a conic शंकुच्छेद
semiconjugate axis सामि-
 अनुबद्ध अक्ष
semilatus rectum सामिउत्थान
semimajor axis सामिप्रधान अक्ष
semiminor axis सामिगौण अक्ष
semitransverse axis सामि
 अनुप्रस्थ अक्ष
simultaneously युगपत्
squaring द्विघातन
square वर्ग
stage प्रक्रम
standard प्रमाप
subnormal अधोलंब
substitution आदेश
subtangent अधःस्पर्शरेखा
sum योग

system पद्धति
symmetrical संमितीय
table सारणी
tangent स्पर्शरेखा
throughout साद्यंत
transformed रूपांतरित
transverse axis अनुप्रस्थ अक्ष
value अर्हा, मान
vertex शिरोबिंदु, शीर्ष
vectorial angle सदिश कोण

Bhawan's Sri Sankaracharya Sanskrit Mahavidyalaya
Bharatiya Vidya
903

...va Bha... Sara...

DATE DUE

Class No. 510 Book No.

Accession No. 757

This book should be returned to the Library on the date last stamped. A fine of 0.6 nP. will be charged for each day the book is kept over time.